

TENSÕES DEVIDAS AO BI-MOMENTO EM TABULEIROS DE PONTES DE CON-  
CRETO ARMADO BI-APOIADAS E COM CONTRAPESOS MACIÇOS

Luiz Herkenhoff Coelho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

---

Prof. Sydney Martins G.dos Santos  
(Presidente)

---

Prof. Ronaldo Carvalho Batista

---

Prof. Sergio Fernandes Villaça

---

Prof. Benjamin Ernani Diaz

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
MARÇO, 1984

COELHO, LUIZ HERKENHOFF

Tensões devidas ao bi-momento em tabuleiros de pontes de concreto armado bi-apoiadas e com contrapesos maciços (Rio de Janeiro, 1984).

VIII, 80 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ), M.Sc, Engenharia Civil, 1984).

Tese - Univ.Fed. Rio de Janeiro

1.Bi-momento I.COPPE/UFRJ II Título (série).

\*

À Antonina, que tanto me incent  
tivou durante a elaboração dese  
te trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos professores funcionários do Departamento de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ que direta ou indiretamente contribuíram na nossa formação, em especial ao professor Sydney Martins Gomes dos Santos, pela orientação indispensável à execução deste trabalho.

Somos gratos, finalmente, a Thereza e Fátima pelo trabalho de datilografia.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

TENSÕES DEVIDAS AO BI-MOMENTO EM TABULEIROS  
DE PONTES DE CONCRETO ARMADO BI-APOIADAS E  
COM CONTRAPESOS MACIÇOS

LUIZ HERKENHOFF COELHO

Março, 1984

Orientador: Sydney Martins Gomes dos Santos

Programa: Engenharia Civil

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estabelecer um procedimento para a análise da ordem de grandeza das tensões de vidas ao bi-momento em tabuleiros de pontes bi-apoiadas, de concreto armado, com contrapesos maciços.

Inicialmente, é apresentada uma revisão da teoria de bi-momento e um procedimento para o cálculo de estruturas hiperestáticas, quando são introduzidas as expressões para o bi-momento e tensões consequentes para a secção tipo de um tabuleiro com duas vigas principais. Posteriormente é feito o estudo das cargas móveis e das linhas de influência do bi-momento.

Finalmente é feita a aplicação do procedimento exposto a um projeto de tipo corrente.

Em apêndice, são apresentados procedimentos de uso e listagens de programas para calculadoras de bolso TI-59 para cálculo de ordenadas de linhas de influência do bi-momento, ordenadas do diagrama de bi-momentos para viga bi-engastada e ainda cálculo de parâmetros para determinação de tensões de flexão.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

WARPING STRESSES IN SIMPLY SUPPORTED  
REINFORCED CONCRETE BRIDGE DECKS WITH  
BULKY COUNTERWEIGHTS

LUIZ HERKENHOFF COELHO

March, 1984

Chairman: Sydney Martins Gomes dos Santos  
Department: Engenharia Civil

Abstract

The objective of the present study is to establish a proceeding to analyse the order of magnitude of the warping stresses in simply supported reinforced concrete bridge deck with bulky counterweights.

Initially it is presented a review of the warping moment theory and a proceeding for the analysis of a particular statically indetermined structure. The type of structure under analysis is that of a standard roadway bridge having a cross section constituted by a slab and two main beams. For this particular case adequate expressions for the warping moment and stresses are introduced into the analysis framework. Moreover the warping moment influence lines for live loads are presented.

Finally, the appendices present the user's manuals plus computer programs, specially designed for pocket calculators TI-59, for obtaining the warping moment influence line ordinates, warping moment ordinates for fixed-end beams, and also the parameters necessary to find the flexural stresses.

## INDICE

Introdução .....	1
Cap.I - Hiperestática dos bi-momentos em vigas bi-engastadas .....	3
Cap.II- Expressões do bi-momento e tensões consequentes em tabuleiros com duas vigas principais.....	16
Cap. III-Estudo das cargas móveis e linhas de influência do bi-momento.....	22
Cap.IV- Aplicações a um projeto de tipo cor rente.....	28
Conclusão.....	57
Apêndices.....	59
Apêndice I - Programa para cálculo das orde nadas de linhas de influência do bi-momento em uma viga bi- engastada.....	60
Apêndice II - Programa para cálculo das orde nadas do diagrama de bi-momen tos para uma viga bi-engastada sujeita a um momento torsor <u>u</u> nitário uniformemente distribuí do.....	66
Apêndice III- Programa para cálculo de parâme tros utilizados no cálculo de tensões de flexão e flecha ( no estádio II) de vigas retangula res ou "T".....	70
Bibliografia .....	80

## NOTAÇÃO

$T$  - momento torsor  
 $T_s$  - Torção de Saint-Venant  
 $T_B$  - Torção devida ao bi-momento  
 $P$  - carga concentrada  
 $C$  - constante  
 $E$  - módulo de elasticidade longitudinal  
 $G$  - módulo de elasticidade transversal  
 $B$  - bi-momento  
 $J_t$  - momento de inércia à torção  
 $J_\omega$  - momento setorial de inércia  
 $E_\omega$  - momento setorial estático  
 $E_{\omega y}, E_{\omega x}$  - produtos setoriais de inércia  
 $CG$  - centro de gravidade  
 $Y_{CG}$  - ordenada do CG  
 $x, y, z$  - sistema de coordenadas  
 $x_A, y_A$  - coordenadas do centro de cisalhamento  
 $h_f$  - espessura da mesa de Viga "T"  
 $b_w$  - espessura da alma de viga "T"  
 $d$  - altura útil  
 $a, b, \ell$  - comprimentos  
 $q$  - carga uniformemente distribuída  
 $m_t$  - momento torsor uniformemente distribuído  
 $\sigma$  - tensão normal  
 $\omega$  - área setorial (coeficiente de enpenamento)  
 $\phi$  - ângulo de rotação



## INTRODUÇÃO

Em construção empregam-se frequentemente peças longas de paredes delgadas, que têm alta resistência e relativamente baixo peso próprio.

A característica das peças longas de paredes delgadas é ter sua espessura muito menor que a largura e esta, por sua vez, muito menor que o comprimento (Fig.1 ).

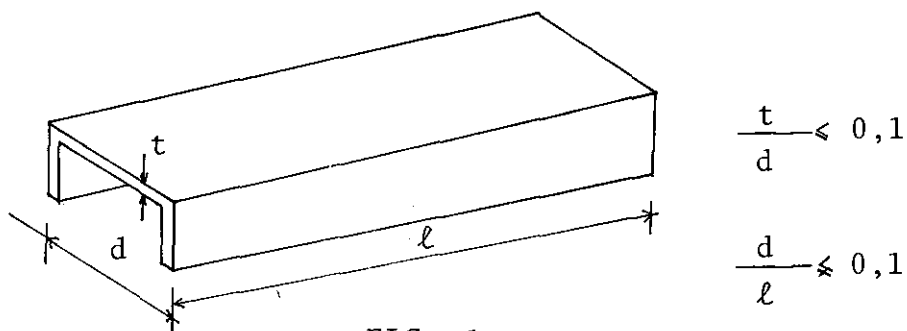


FIG. 1

Uma particularidade das barras de paredes delgadas é poderem apresentar tensões normais quando submetidas à torção pura. Analisemos o comportamento de uma viga "U" engastada numa extremidade e com um momento torsor aplicado na extremidade livre (Fig. 2 ).

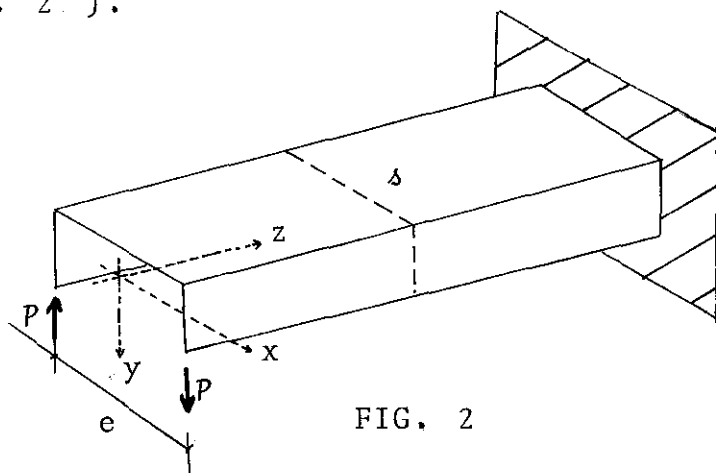


FIG. 2

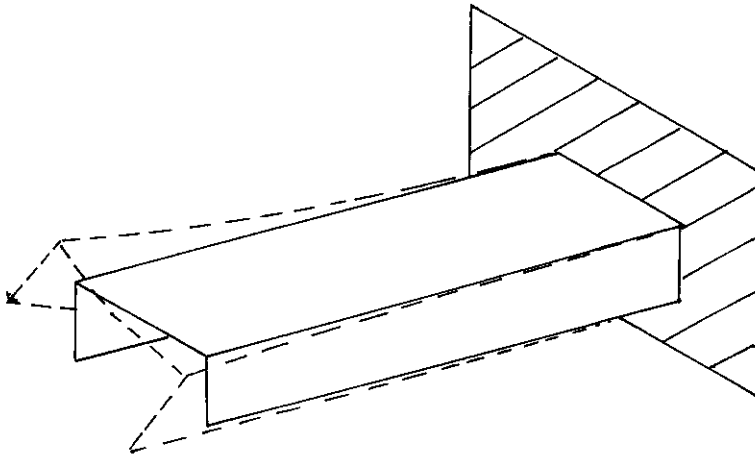


FIG. 3

A deformação da viga será esquematizada na fig. 3 em que a aba direita sofrerá tração nas fibras superiores e compressão nas fibras inferiores, enquanto que na aba esquerda o fenômeno é inverso. Podemos concluir que as secções transversais não mais permanecerão planas.

O empenamento das secções transversais dará origem a tensões normais, que formarão um sistema de forças auto-equilibrado, visto não terem sido aplicadas solicitações normais nem fletoras.

A este sistema auto-equilibrado, corresponde uma expressão a que VLASSOV<sup>2</sup> deu o nome de bi-momento.

## CAPÍTULO I

## HIPERESTÁTICA DOS BI-MOMENTOS EM VIGAS BI-ENGASTADAS

## 1.1 Introdução:

Para a solução de estruturas isostáticas podemos aplicar diretamente a equação diferencial (2):

$$T = GJ_t \frac{d\phi}{dz} - EJ_\omega \frac{d^3\phi}{dz^3} = EJ_\omega (\gamma^2 \phi' - \phi''') \quad (1.1)$$

$$\gamma^2 = \frac{GJ_t}{EJ_\omega}, \text{ ou}$$

$$\gamma^2 \phi' - \phi''' = \frac{T}{EJ_\omega}$$

a qual, para cada caso de carregamento, terá uma solução particular ( $\phi_p$ ).

Equação homogênea será:

$$\phi^{iv} - \gamma^2 \phi'' = 0$$

cuja solução geral é:

$$\phi = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z; \text{ donde:}$$

$$\phi' = C_2 + \gamma (C_3 \operatorname{sh} \gamma z + C_4 \operatorname{ch} \gamma z)$$

$$\phi'' = \gamma^2 (C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z)$$

$$\phi''' = \gamma^3 (C_3 \operatorname{sh} \gamma z + C_4 \operatorname{ch} \gamma z)$$

As constantes de integração são determinadas com as condições de extremidade.

Com a expressão do ângulo de rotação  $\phi$  determinada, temos:

$$T_s = GJ_t \phi' \quad - \text{Torção de Saint-Venant}$$

$$T_b = -EJ_\omega \phi''' \quad - \text{Torção devida ao bi-momento}$$

$$B = -EJ_\omega \phi'' \quad - \text{Bi-momento}$$

$$T = T_s + T_b$$

## 1.2 Sistema Principal:

Para a solução de estruturas hiperestáticas podemos proceder de forma análoga ao método das forças, ou seja, liberando tantos vínculos quantos forem necessários para transformar a estrutura em isostática. Assim, seja a viga bi-engastada sujeita a um momento torsor qualquer (Fig. 1.1):

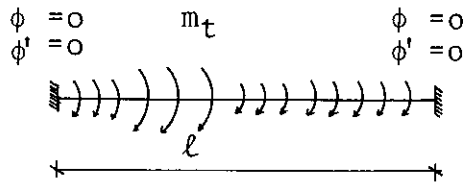


FIG. 1.1

Neste caso temos que liberar 2 vínculos superabundantes; no caso escolhemos, por simplicidade, um engaste (Fig. 1.2) e aplicamos na extremidade liberada um momento torsor ( $X_1$ ) e um

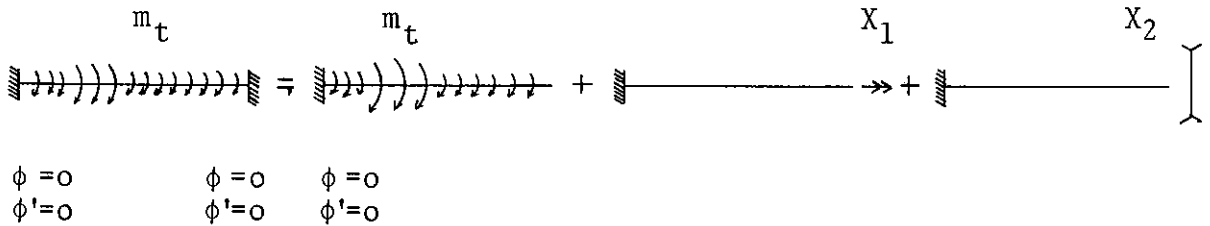


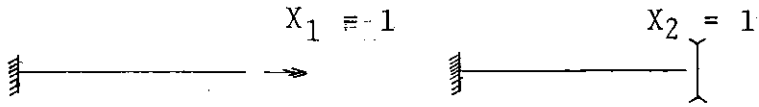
FIG. 1.2

bi-momento ( $X_2$ ), de forma que as deformações se anulem na extremidade

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + \phi_1^* + \phi_2^* = 0 \\ \phi' &= \phi'_0 + \phi_1^{*'} + \phi_2^{*'} = 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

As incôgnitas do problema ficam sendo o momento torsor ( $X_1$ ) e o bi-momento ( $X_2$ ).

Podemos resolver o sistema principal para um momento torsor e um bi-momento unitários, obtendo assim:



As equações (1.1) ficam

$$\phi_0 + X_1 \phi_1 + X_2 \phi_2 = 0$$

$$\phi'_0 + X_1 \phi'_1 + X_2 \phi'_2 = 0$$

ou em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi'_1 & \phi'_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\phi_0 \\ -\phi'_0 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

(1.3)

### 1.3 Cálculo dos Termos de Carga e dos Coeficientes das Equações de Coerência Linear

Os termos de carga  $\phi_0$  e  $\phi'_0$  são obtidos por integração direta da equação diferencial (1.1) para o carregamento aplicado no sistema principal (Fig. 1.3).

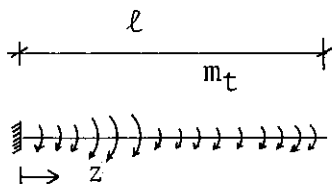


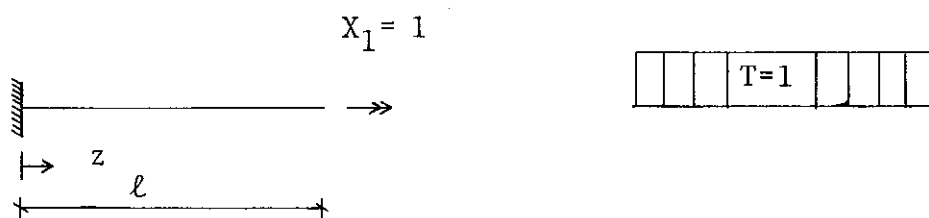
FIG. 1.3

$$\phi_0 = \phi(l)$$

$$\phi'_0 = \phi'(l)$$

Os coeficientes das equações de coerência linear são obtidos por integração da equação (1.1) para o momento torsor ( $X_1 = 1$ ) e o bi-momento ( $X_2 = 1$ ) aplicadas no sistema principal.

Solução para o momento torsor concentrado unitário aplicado na extremidade livre:



Solução geral:  $\phi = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z$

$$\phi' = C_2 + \gamma (C_3 \operatorname{sh} \gamma z + C_4 \operatorname{ch} \gamma z)$$

$$\phi'' = \gamma^2 (C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z)$$

$$\phi''' = \gamma^3 (C_3 \operatorname{sh} \gamma z + C_4 \operatorname{ch} \gamma z)$$

Temos as seguintes condições de extremidade:

$$z = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi' = 0 \end{cases} \quad z = \ell \rightarrow \begin{cases} T = 1 \\ B = 0 \end{cases} \therefore \phi'' = 0$$

$$\phi(0) = 0, C_1 + C_3 = 0$$

$$\phi'(0) = 0, C_2 + \gamma C_4 = 0$$

$$\phi''(\ell) = 0, C_3 + C_4 \operatorname{tgh} \gamma \ell = 0$$

$$GJ_t \phi'(\ell) - EJ_\omega \phi'''(\ell) = 1 \therefore C_2 GJ_t = 1 \therefore C_2 = \frac{1}{GJ_t}$$

$$C_4 = \frac{1}{\gamma GJ_t}$$

$$C_3 = \frac{1}{\gamma GJ_t} \operatorname{tgh} \gamma \ell$$

$$C_1 = -\frac{1}{\gamma GJ_t} \operatorname{tgh} \gamma \ell$$

Virã pois:

$$GJ_t \phi = z + \frac{1}{\gamma} \operatorname{tgh} \gamma \ell (\operatorname{ch} \gamma z - 1) - \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma z$$

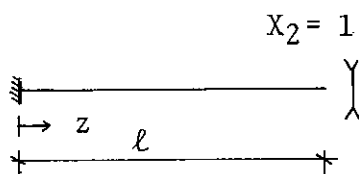
$$GJ_t \phi' = 1 - \operatorname{ch} \gamma z + \operatorname{tgh} \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma z$$

Então:

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi(\ell) &= (\ell + \frac{1}{\gamma} \operatorname{tgh} \gamma \ell (\operatorname{ch} \gamma \ell - 1) - \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma \ell) \cdot \frac{1}{GJ_t} = \\ &= \frac{\gamma \ell \operatorname{ch} \gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell}{GJ_t \gamma \operatorname{ch} \gamma \ell} \end{aligned}$$

$$\phi'_1 = \phi'(\ell) = \frac{1 - \operatorname{ch} \gamma \ell + \operatorname{tgh} \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell}{GJ_t} = \frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

Solução para o bi-momento concentrado unitário aplicado na extremidade livre:



Temos as seguintes condições de extremidade:

$$z = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi' = 0 \end{cases}, \quad z = \ell \rightarrow \begin{cases} B = 1 \therefore \phi'' = -\frac{1}{EJ\omega} \\ T = 0 \therefore \gamma^2 \phi' - \phi''' = 0 \end{cases}$$

$$\phi(0) = 0 \therefore C_1 + C_3 = 0$$

$$\phi'(0) = 0 \therefore C_2 + \gamma C_4 = 0$$

$$\gamma^2 \phi'(\ell) - \phi'''(\ell) = 0 \therefore \gamma^2 C_2 = 0 \therefore C_2 = 0$$

$$C_4 = 0$$

$$\phi''(\ell) = -\frac{1}{EJ\omega} \therefore \gamma^2 (C_3 \operatorname{ch} \gamma \ell) = -\frac{1}{EJ\omega}$$

$$C_3 = -\frac{1}{\gamma^2 EJ\omega \cdot \operatorname{ch} \gamma \ell} = -\frac{1}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$C_1 = \frac{1}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$\phi = \frac{1}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell} (1 - \operatorname{ch} \gamma z)$$

$$\phi' = -\frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma z}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

Então:

$$\phi_2 = \phi(\ell) = \frac{1 - \operatorname{ch} \gamma \ell}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell} = -\frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$\phi'_2 = \phi'(\ell) = -\frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma \ell}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

Então, a matriz dos coeficientes das equações de coerência linear será:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi'_1 & \phi'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma \ell \operatorname{ch} \gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell}{GJ_t \gamma \operatorname{ch} \gamma \ell} & -\frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell} \\ \frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell} & -\frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma \ell}{GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell} \end{bmatrix}$$

ou, multiplicando as equações por  $GJ_t$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma \ell \operatorname{ch} \gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell}{\gamma \operatorname{ch} \gamma \ell} & -\frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{\operatorname{ch} \gamma \ell} \\ \frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{\operatorname{ch} \gamma \ell} & -\frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma \ell}{\operatorname{ch} \gamma \ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -GJ_t \phi_0 \\ -GJ_t \phi'_0 \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$



Resolvamos o sistema de equações:

$$\Delta = - \frac{\gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell + 2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell)}{\operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$\Delta_1 = GJ_t \phi_o \cdot \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma \ell}{\operatorname{ch} \gamma \ell} - GJ_t \phi'_o \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{\operatorname{ch} \gamma \ell}$$

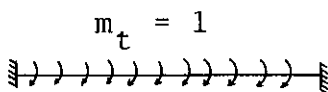
$$\Delta_2 = - GJ_t \phi'_o \cdot \frac{\gamma \ell \operatorname{ch} \gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell}{\gamma \operatorname{ch} \gamma \ell} + GJ_t \phi_o \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma \ell - 1}{\operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

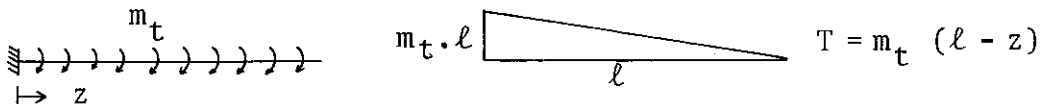
Assim, para se resolver qualquer caso de carregamento de uma viga bi-engastada, basta calcular os termos de carga e resolver o sistema de equações lineares (1.5). Observe-se que o sistema de equações (1.5) foi obtido para o sistema principal da Fig. 1.2.

Exemplo 1.1:

Viga bi-engastada com momento torsor uniformemente distribuído:



Sistema principal:



Cálculo dos termos de carga,  
temos que:

$$T = EJ_{\omega} (\gamma^2 \phi' - \phi'''), \text{ ou derivando}$$

$$\phi^{iv} - \gamma^2 \phi'' = -\frac{1}{EJ_{\omega}} \cdot \frac{dT}{dz}$$

$$\phi^{iv} - \gamma^2 \phi'' = + \frac{1}{EJ_{\omega}}$$

Com a solução particular  $\phi_{op} = -\frac{z^2}{2GJ_t}$

Solução geral da homogênea

$$\phi_o = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z;$$

a solução geral é:

$$\phi_o = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z - \frac{z^2}{2GJ_t}$$

Condições de extremidade,

$$z = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi_o(0) = 0 \\ \phi'_o(0) = 0 \end{cases}; \quad z = \ell \rightarrow \begin{cases} T = 0 \therefore \gamma^2 \phi'_o(\ell) - \phi''_o(\ell) = 0 \\ B = 0 \therefore \phi''_o(\ell) = 0 \end{cases}$$

As constantes de integração terão os valores:

$$C_1 = -\frac{(1 + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell)}{\gamma^2 GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$C_2 = \frac{\ell}{GJ_t}$$

$$C_3 = \frac{(1 + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell)}{\gamma^2 GJ_t \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$C_4 = -\frac{\ell}{\gamma GJ_t}$$

E a solução final:

$$GJ_t \phi_o = z \left( \ell - \frac{z}{2} \right) - \frac{1}{\gamma^2} \left[ \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma z - \frac{(1 + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell)(\operatorname{ch} \gamma z - 1)}{\operatorname{ch} \gamma \ell} \right]$$

$$GJ_t \phi'_o = (\ell - z) - \frac{1}{\gamma} \left[ \gamma \ell \operatorname{ch} \gamma z - \frac{(1 + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell) \operatorname{sh} \gamma z}{\operatorname{ch} \gamma \ell} \right]$$

Fazendo  $z = \ell$ , obteremos os termos de carga

$$\begin{cases} GJ_t \phi_o = \frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{\gamma^2 \operatorname{ch} \gamma \ell} (1 - \operatorname{ch} \gamma \ell + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell) \\ GJ_t \phi'_o = \frac{\operatorname{sh} \gamma \ell - \gamma \ell}{\gamma \operatorname{ch} \gamma \ell} \end{cases}$$

A solução da viga bi-engastada será:

$$\phi = \phi_0 + X_1 \phi_1 + X_2 \phi_2$$

Passemos à determinação de  $X_1$  e  $X_2$ . De acordo com o processo apresentado neste capítulo temos:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = \frac{\ell [2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell]}{2 \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

donde:

$$X_1 = - \frac{\ell [(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \frac{\gamma \ell}{2} \operatorname{sh} \gamma \ell]}{\gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell + 2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell)} = - \frac{\ell}{2}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\gamma^2 \operatorname{ch} \gamma \ell} \left\{ \frac{\gamma^2 \ell^2}{2} (1 + \operatorname{ch} \gamma \ell) - [\gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell + 2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell)] - \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell \right\}$$

e

$$X_2 = - \frac{\ell^2}{2} \frac{1 + \operatorname{ch} \gamma \ell}{\gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell + 2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell)} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\ell}{\gamma} \frac{\operatorname{sh} \gamma \ell}{\gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell + 2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell)}$$

Simplificando, vem:

$$X_2 = - \frac{\ell}{2 \gamma \operatorname{tgh} \frac{\gamma \ell}{2}} + \frac{1}{\gamma^2}$$

donde a solução final:

$$GJ_t \phi = \frac{z(\ell - z)}{2} - \frac{\ell}{2 \gamma \operatorname{tgh} \frac{\gamma \ell}{2}} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sh} \gamma z + \operatorname{sh} \gamma (\ell - z)}{\operatorname{sh} \gamma \ell} \right]$$

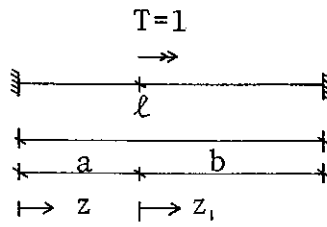
$$T_s = GJ_t \phi' = \frac{z' - z}{2} + \frac{\ell}{2 \operatorname{tgh} \frac{\gamma \ell}{2}} \frac{\operatorname{ch} \gamma z - \operatorname{ch} \gamma z'}{\operatorname{sh} \gamma \ell}$$

$$B = - EJ_\omega \phi'' = \frac{1}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{\gamma \ell}{2 \operatorname{tgh} \frac{\gamma \ell}{2}} \frac{\operatorname{sh} \gamma z - \operatorname{sh} \gamma z'}{\operatorname{sh} \gamma \ell} \right)$$

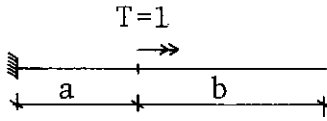
onde  $z' = \ell - z$ .

Exemplo 1.2:

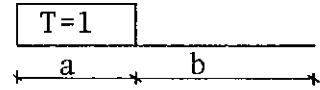
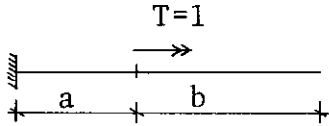
Viga bi-engastada sujeita a um momento torsor concentrado unitário:



Sistema principal:



Cálculo dos termos de carga



Temos a equação diferencial:

$\phi^{iv} - \gamma^2 \phi'' = 0$ , pois  $T$  é constante em cada trecho ( $a$  ou  $b$ ).  
Chamemos de  $\phi_a$  e  $\phi_b$  as soluções para os trechos  $0 \leq z \leq a$  e  $a < z \leq l$  respectivamente. Teremos, então:

$$\phi_a = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z$$

$$\phi'_a = C_2 + \gamma(C_3 \operatorname{sh} \gamma z + C_4 \operatorname{ch} \gamma z)$$

$$\phi''_a = \gamma^2(C_3 \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \operatorname{sh} \gamma z)$$

$$\phi'''_a = \gamma^3(C_3 \operatorname{sh} \gamma z + C_4 \operatorname{ch} \gamma z)$$

$$\phi_b = C_5 + C_6 z_1 + C_7 \operatorname{ch} \gamma z_1 + C_8 \operatorname{sh} \gamma z_1$$

$$\phi'_b = C_6 + \gamma(C_7 \operatorname{sh} \gamma z_1 + C_8 \operatorname{ch} \gamma z_1)$$

$$\phi''_b = \gamma^2(C_7 \operatorname{ch} \gamma z_1 + C_8 \operatorname{sh} \gamma z_1)$$

$$\phi'''_b = \gamma^3(C_7 \operatorname{sh} \gamma z_1 + C_8 \operatorname{ch} \gamma z_1)$$

Com as condições de extremidades

$$z = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi_a = 0 \\ \phi'_a = 0 \end{cases} \quad z_1 = b \rightarrow \begin{cases} B = 0 \therefore \phi'' = 0 \\ T = 0 \therefore \phi''' - \gamma^2 \phi' = 0 \end{cases}$$

e as condições de continuidade

$$\phi_a(z = a) = \phi_b(z_1 = 0)$$

$$\phi'_a(z = a) = \phi'_b(z_1 = 0)$$

$$\phi''_a(z = a) = \phi''_b(z_1 = 0)$$

temos também que para  $0 \leq z \leq a$ ,  $T = 1$ .

Desta forma, as 8 constantes de integração podem ser calculadas e encontramos:

$$C_1 = \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\gamma GJ_t \text{ch}\gamma \ell}$$

$$C_2 = \frac{1}{GJ_t}$$

$$C_3 = -\frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\gamma GJ_t \text{ch}\gamma \ell}$$

$$C_4 = -\frac{1}{\gamma GJ_t}$$

$$C_5 = \frac{a + \text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\gamma GJ_t \text{ch}\gamma \ell}$$

$$C_6 = 0$$

$$C_7 = \frac{-\text{sh}\gamma b (\text{ch}\gamma a - 1)}{\gamma GJ_t \text{ch}\gamma \ell}$$

$$C_8 = \frac{\text{ch}\gamma b (\text{ch}\gamma a - 1)}{\gamma GJ_t \text{ch}\gamma \ell}$$

Temos então a solução:

1º) Para  $0 \leq z \leq a$

$$GJ_t = \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\gamma \text{ch}\gamma \ell} (1 - \text{ch}\gamma z) + z - \frac{\text{sh}\gamma z}{\gamma}$$

2º) Para  $a < z \leq \ell$

$$GJ_t \phi = a + \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\gamma \text{ch}\gamma \ell} + \frac{\text{sh}\gamma b (1 - \text{ch}\gamma a) \text{ch}\gamma z_1}{\gamma \text{ch}\gamma \ell} - \frac{\text{ch}\gamma b (1 - \text{ch}\gamma a) \text{sh}\gamma z_1}{\gamma \text{ch}\gamma \ell}$$

que, simplificando, dará:

$$GJ_t = \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\gamma \text{ch}\gamma \ell} (1 - \text{ch}\gamma z) + z - \frac{\text{sh}\gamma z}{\gamma} - z_1 + \frac{1}{\gamma} \text{sh}\gamma z_1$$

Observamos que as duas soluções são idênticas a menos das

duas últimas parcelas na solução para  $a < z \leq \ell$ , assim podemos escrever:

$$GJ_{t\phi} = \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\gamma \text{ch}\gamma \ell} (1 - \text{ch}\gamma z) + z - \frac{\text{sh}\gamma z}{\gamma} \quad \Bigg| - z_1 + \frac{1}{\gamma} \text{sh}\gamma z_1$$

$$T_s = GJ_{t\phi'} = - \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\text{ch}\gamma \ell} \text{sh}\gamma z + 1 - \text{ch}\gamma z \quad \Bigg| - 1 + \text{ch}\gamma z_1$$

onde os termos à direita da barra vertical têm significado apenas para  $a < z \leq \ell$ .

Os termos de carga são obtidos para  $z = \ell$ ,  $z_1 = b$ .

$$GJ_{t\phi_0} = \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\text{ch}\gamma \ell} (1 - \text{ch}\gamma \ell) - \ell + \frac{\text{sh}\gamma \ell}{\gamma} - b + \frac{1}{\gamma} \text{sh}\gamma b$$

Simplificando:

$$GJ_{t\phi_0} = \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell + (\ell - b)\ell \text{ch}\gamma \ell}{\gamma \text{ch}\gamma \ell}$$

$$GJ_{t\phi'_0} = - \frac{\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell}{\text{ch}\gamma \ell} \cdot \text{sh}\gamma \ell + 1 - \text{ch}\gamma \ell - 1 + \text{ch}\gamma b$$

$$GJ_{t\phi'_0} = \frac{\text{ch}\gamma a - 1}{\text{ch}\gamma \ell}$$

Procedendo de forma análoga à anterior, obtemos:

$$X_1 = - \frac{\text{sh}\gamma \ell (\text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell + \gamma \text{ach}\gamma \ell) + (\text{ch}\gamma a - 1)(1 - \text{ch}\gamma \ell)}{\text{ch}\gamma \ell [\gamma \ell \text{sh}\gamma \ell + 2(1 - \text{ch}\gamma \ell)]}$$

$$X_2 = - \frac{(1 - \text{ch}\gamma a)(\gamma \ell \text{ch}\gamma \ell - \text{sh}\gamma \ell) + (\text{ch}\gamma \ell - 1)(\gamma \text{ach}\gamma \ell + \text{sh}\gamma b - \text{sh}\gamma \ell)}{\gamma \text{ch}\gamma \ell [\gamma \ell \text{sh}\gamma \ell + 2(1 - \text{ch}\gamma \ell)]}$$

A solução da viga bi-engastada será:

$$\phi = \phi_0 + X_1 \phi_1 + X_2 \phi_2,$$

ou:

$$GJ_{\mathbf{t}}\phi = B_o(1 - \operatorname{ch}_{\gamma z}) + T_o(z - \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh}_{\gamma z}) \Big| - z_1 + \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh}_{\gamma z_1}$$

$$T_s = GJ_{\mathbf{t}}\phi' = -B_o\gamma \operatorname{sh}_{\gamma z} + T_o(1 - \operatorname{ch}_{\gamma z}) \Big| - 1 + \operatorname{ch}_{\gamma z_1}$$

$$B = -EJ_{\omega}\phi'' = B_o\operatorname{ch}_{\gamma z} + T_o \cdot \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh}_{\gamma z} \Big| - \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh}_{\gamma z_1}$$

onde:

$$B_o = \ell \cdot \frac{(1 - \operatorname{ch}_{\gamma \ell}) \left( \frac{b}{\ell} - \frac{\operatorname{sh}_{\gamma b}}{\gamma \ell} \right) - (1 - \operatorname{ch}_{\gamma b}) \left( 1 - \frac{1}{\gamma \ell} \operatorname{sh}_{\gamma \ell} \right)}{\gamma \ell \operatorname{sh}_{\gamma \ell} + 2(1 - \operatorname{ch}_{\gamma \ell})}$$

$$T_o = \frac{\gamma \operatorname{sh}_{\gamma \ell} \left( b - \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh}_{\gamma b} \right) + (1 - \operatorname{ch}_{\gamma b}) (1 - \operatorname{ch}_{\gamma \ell})}{\gamma \ell \operatorname{sh}_{\gamma \ell} + 2(1 - \operatorname{ch}_{\gamma \ell})}$$

## CAPÍTULO II

EXPRESSÕES DO BI-MOMENTO E TENSÕES CONSEQUENTES EM TABULEIROS  
COM DUAS VIGAS PRINCIPAIS

Para a aplicação das expressões obtidas anteriormente, torna-se necessária a determinação de características geométricas e setoriais.

Passemos à sua determinação para uma secção tipo (Fig. 2.1):

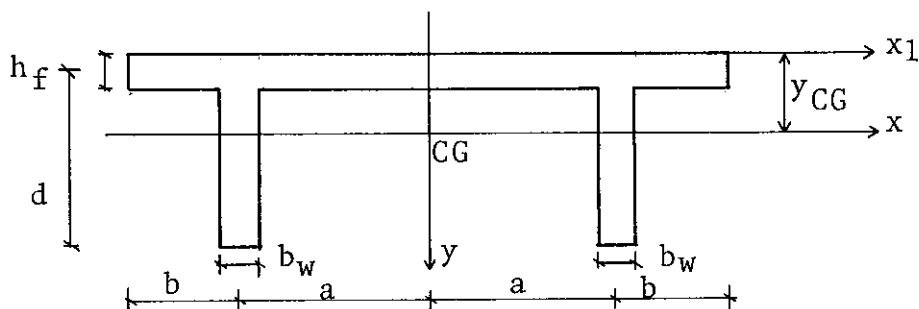


FIG. 2.1

## 2.1 Determinação das Características Geométricas:

Por serem de uso corrente, não entraremos em detalhe do cálculo do centro de gravidade e dos momentos de inércia.

## 2.2 Características Setoriais:

Como complemento das características geométricas, necessitaremos de outras características próprias das barras de paredes delgadas que são determinadas utilizando a área setorial que definimos a seguir.

Seja uma secção transversal (Fig. 2.2), escolhamos um pólo P qualquer, liguemos este pólo P às extremidades de um elemento  $ds$  da linha média da secção.



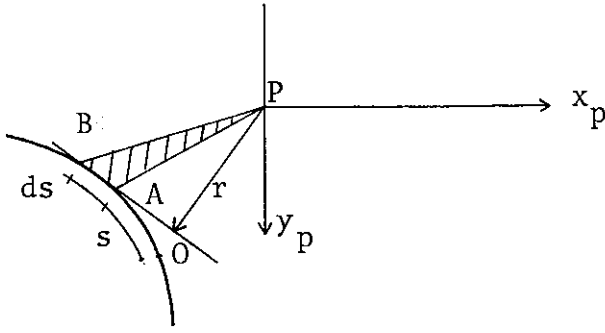


FIG. 2.2

Chamemos  $d\omega$  o dobro da área do triângulo PAB

$$d\omega = r \, ds$$

onde  $r$  é a distância do polo  $P$  à tangente ao contorno da secção no ponto  $A$ . A integral

$$\omega = \int r \, ds$$

denomina-se área setorial ou coeficiente de empenamento. Assim, a área setorial será o dobro da área varrida pelo raio vetor  $PA$  ao mover-se o ponto  $A$  desde uma origem  $O$  arbitrária até um certo valor  $s$  do arco.

$\omega$  será positivo se  $\overline{PA}$  mover-se de  $x$  para  $y$  (sentido horário).

Com a área setorial conhecida, podemos definir as outras grandezas setoriais:

$$E_{\omega} = \int \omega \, ds \text{ — momento setorial estático}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\omega y} &= \int x \, \omega \, ds \\ E_{\omega x} &= \int y \, \omega \, ds \end{aligned} \right\} \text{ produtos setoriais de inércia}$$

$$J_{\omega} = \int \omega^2 \, ds \text{ — momento setorial de inércia}$$

### 2.2.a) Coordenadas do Centro de Cisalhamento

Podemos obter as coordenadas do centro de cisalhamento de uma secção a partir de um polo  $P'$  arbitrário (Fig. 2.3) pelas expressões:

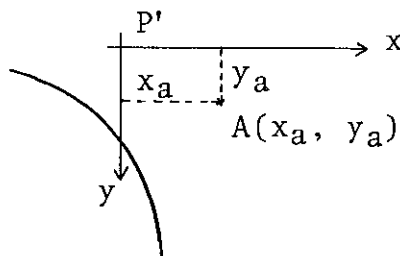


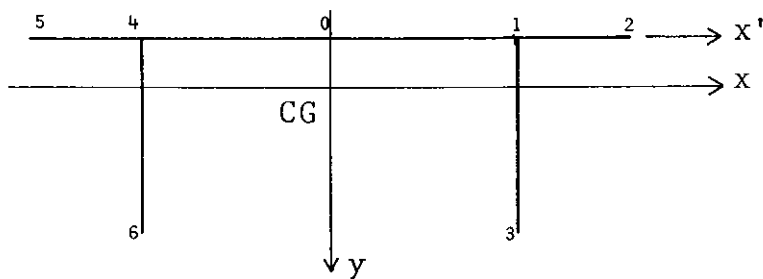
FIG. 2.3

$$x_a = \frac{E \omega_{p'} x}{J_x}$$

$$y_a = -\frac{E \omega_{p'} y}{J_y}$$

Vejamos o processo de cálculo para a secção tipo da Fig. 2.1:

— traça-se o diagrama das áreas setoriais ( $\omega$ ) referidas a um polo  $P'$  qualquer, por simplicidade o ponto  $0$ .



$$\omega'_1 = 0$$

$$\omega'_2 = 0$$

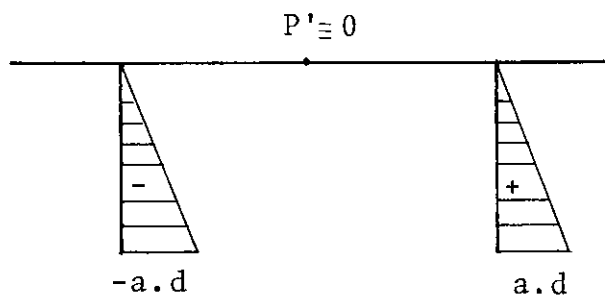
$$\omega'_3 = ad$$

$$\omega'_4 = 0$$

$$\omega'_5 = 0$$

$$\omega'_6 = -ad$$

O diagrama fica



$$E \omega_{p'} \cdot x = \int y \omega' ds = 0 \text{ (por simetria)}$$

$$E \omega_{p'} \cdot y = + \int x \omega' ds = b_w \int x \omega' ds = a^2 d^2 b_w$$

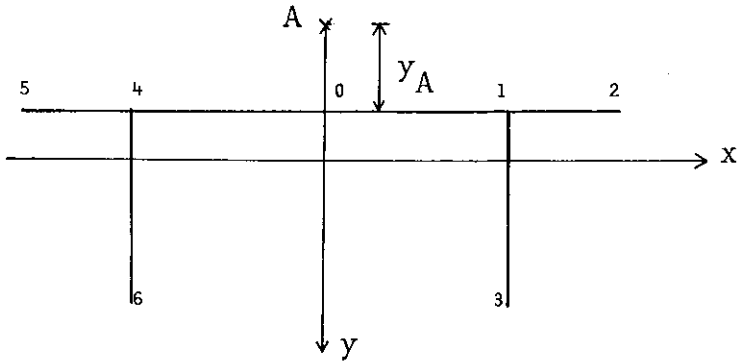
Então, as coordenadas do centro de cisalhamento (referidas ao ponto  $0$ ) são:

$$x'_A = \frac{E \omega_{p'} \cdot x}{J_x} = \frac{0}{J_x} = 0$$

$$y'_A = -\frac{E \omega_{p'} \cdot y}{J_y} = -\frac{(ad)^2 b_w}{J_y} \quad (2.1)$$

$$y_A = |y'_A|$$

### 2.2.b) Diagrama dos Coeficientes de Empenamento ( $\omega$ ) Referidos ao Centro de Cisalhamento



$$\omega_0 = 0$$

$$\omega_1 = -y_A \cdot a$$

$$\omega_2 = \omega_1 - y_A \cdot b$$

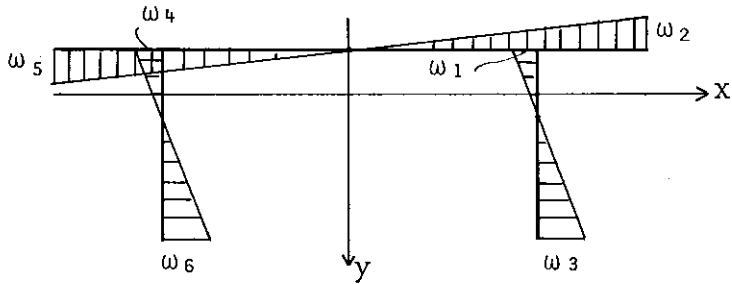
$$\omega_3 = \omega_1 + a \cdot d$$

$$\omega_4 = -\omega_1$$

$$\omega_5 = -\omega_2$$

$$\omega_6 = -\omega_3$$

O diagrama toma o aspecto seguinte:



### 2.2.c) Cálculo do Momento Setorial de inércia

$$J\omega = \int \omega^2 ds$$

Integrando, vem:

$$J\omega = \frac{2}{3} \left\{ h_f(a+b)\omega_2^2 + b_w \left[ y_A \omega_1^2 + (d - y_A) \omega_3^2 \right] \right\}$$

ou

$$J\omega = \frac{2}{3} \left\{ h_f(a+b)\omega_2^2 + b_w d (\omega_1^2 + \omega_3^2 + \omega_1 \omega_3) \right\}$$

(2.2)

### 2.3.a) Cálculo do Momento de Inércia à Torção

$$J_t = \frac{1}{3} \sum h_i^3 s_i$$

$$J_t = \frac{2}{3} \left[ (a + b) h_f^3 + d b_w^3 \right] \quad (2.3)$$

### 2.3.b) Módulo Transversal do Concreto

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

para o concreto  $\nu = 0,2$  (NBI/78)

$$G = \frac{E}{2,4}$$

$$2.3.c) \quad \gamma^2 = \frac{GJ_t}{EJ\omega} = \frac{J_t}{2,4 J\omega}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{J_t}{2,4 J\omega}} \quad \text{para o concreto} \quad (2.4)$$

### 2.4 Cálculo do Bi-Momento

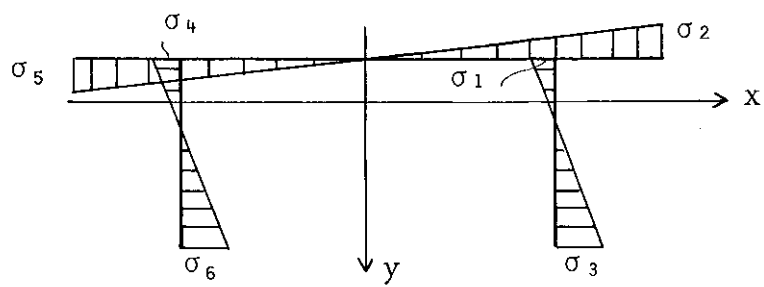
Com o valor de  $\gamma$  calculado, calcula-se o bi-momento utilizando-se as expressões obtidas nos exemplos 1 e 2 do Cap. I.

### 2.5 Tensões Normais

Para o cálculo das tensões normais, tem-se a expressão:

$$\sigma = \frac{B}{J\omega} \omega$$

Note-se que  $B$  e  $J\omega$  são constantes em cada secção transversal da peça; temos, então, que  $\sigma$  é diretamente proporcional a  $\omega$ . Então, o diagrama de tensões terá o mesmo aspecto do diagrama dos coeficientes de empenamento referentes ao centro de cisalhamento.



## CAPÍTULO III

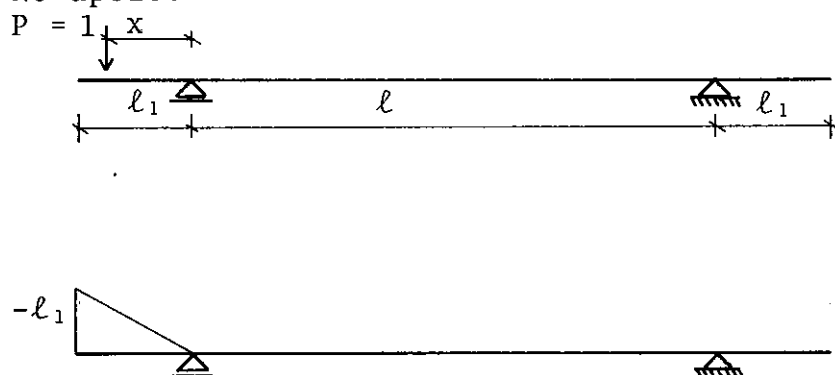
## ESTUDO DAS CARGAS MÓVEIS E LINHAS DE INFLUÊNCIA DOS BI-MOMENTOS

Estudaremos as linhas de influência de momentos fletores e bi-momentos no apoio e no meio do vão.

## 3.1 Linhas de Influência de Momentos Fletores

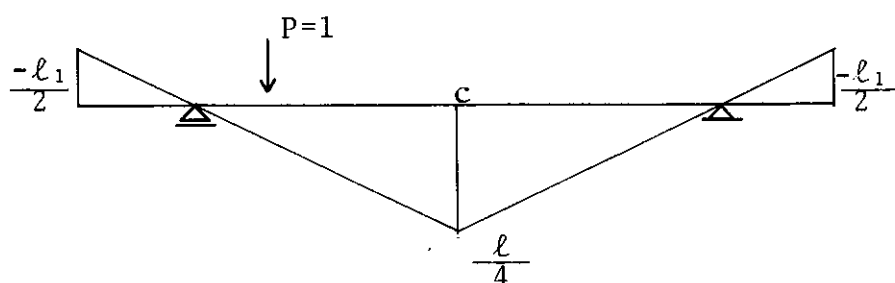
Não entraremos em detalhes por este assunto ser corrente.

## 3.1.1 No apoio:



O momento no apoio é máximo quando a carga se encontra na extremidade do balanço e é nulo quando a carga está no vão interno.

## 3.1.2 No meio do vão:

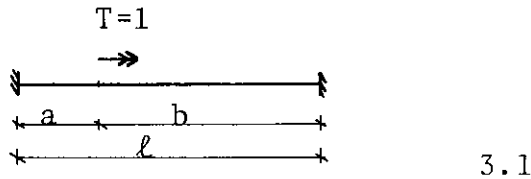


O momento no meio do vão é máximo quando a carga se encontra no meio do vão e é mínimo quando a carga está na extremidade do balanço.

### 3.2 Linhas de Influência do Bi-Momento

A linha de influência do bi-momento em uma secção  $s$  é a representação do valor do bi-momento, nesta secção, produzido por um momento torsor concentrado unitário que percorre a estrutura.

Estudaremos aqui as linhas de influência de uma viga bi-engastada.



Temos, do Cap. I, a expressão do bi-momento para um momento torsor concentrado unitário.

$$\left. \begin{aligned} B &= B_0 \operatorname{ch} \gamma z + T_0 \frac{\operatorname{sh} \gamma z}{\gamma} \Big| - \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma z_1 \\ B_0 &= \ell \cdot \frac{\left(\frac{b}{\ell} - \frac{1}{\gamma \ell} \operatorname{sh} \gamma b\right)(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) - (1 - \operatorname{ch} \gamma b)\left(1 - \frac{\operatorname{sh} \gamma \ell}{\gamma \ell}\right)}{2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell} \\ T_0 &= \frac{(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell)(1 - \operatorname{ch} \gamma b) + \gamma \operatorname{sh} \gamma \ell \left(b - \frac{1}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma b\right)}{2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell} \end{aligned} \right\} \quad 3.1$$

#### 3.2.1 L.I. no Apoio:

A equação da L.I. no apoio será a equação (3.1) para  $z = 0$  com  $b$  variando de  $\ell$  a 0.

$$B = B_0 = \ell \frac{\left(\frac{b}{\ell} - \frac{1}{\gamma \ell} \operatorname{sh} \gamma b\right)(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) - (1 - \operatorname{ch} \gamma b)\left(1 - \frac{\operatorname{sh} \gamma \ell}{\gamma \ell}\right)}{2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell}$$

que, graficamente, tem o aspecto da Fig. 3.2.

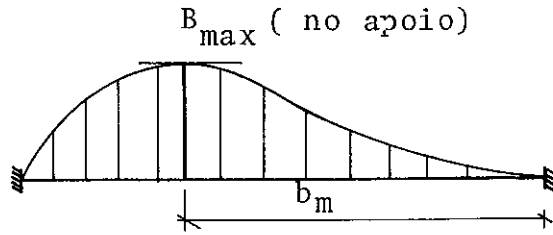


FIG. 3.2

Calculemos a posição da carga que produz o bi-momento máximo:

$$\frac{dB}{db} = 0 = \ell \cdot \frac{\frac{1}{\ell} (1 - \operatorname{ch} \gamma b)(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \gamma \operatorname{sh} \gamma b \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \gamma \ell}{\gamma \ell}\right)}{2(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \gamma \ell \operatorname{sh} \gamma \ell} = 0$$

$$\therefore (1 - \operatorname{ch} \gamma b)(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \operatorname{sh} \gamma b(\gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell) = 0$$

$$\frac{\operatorname{ch} \gamma b - 1}{\operatorname{sh} \gamma b} = \operatorname{tgh} \frac{\gamma b}{2} = \frac{\gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell}{1 - \operatorname{ch} \gamma \ell}$$

$$\frac{\gamma b}{2} = \frac{1}{\gamma} \ln \left[ \frac{1 + \frac{\gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell}{1 - \operatorname{ch} \gamma \ell}}{1 - \frac{\gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell}{1 - \operatorname{ch} \gamma \ell}} \right]$$

$$b_m = \frac{1}{\gamma} \ln \left[ \frac{(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + (\gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell)}{(1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) - (\gamma \ell - \operatorname{sh} \gamma \ell)} \right]$$

Como vemos, tanto o valor do bi-momento quanto a posição da carga para o bi-momento máximo variam, dependendo não só do vão, mas também da secção transversal e do material da estrutura.

### 3.2.2 L.I. no Meio do Vão:

A equação da L.I. será a equação 3.1 para  $z = \frac{\ell}{2}$ , que, graficamente, terá o aspecto da Fig. 3.3.

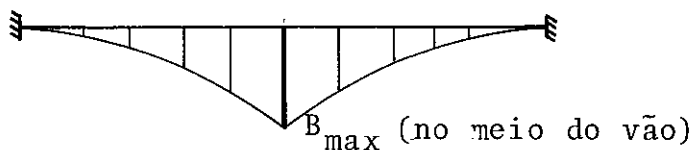


FIG. 3.3



O bi-momento máximo ocorre no meio do vão, quando a carga ali se encontra, porém o seu valor depende também do vão, secção transversal e do material de que é constituída a peça.

### 3.3 Análise das Linhas de Influência

Estudaremos agora as posições mais desfavoráveis do carregamento.

#### 3.3.1 Para as Tensões no Apoio

Teremos duas situações críticas, uma com o momento fletor máximo (Fig. 3.4) e outra com o bi-momento máximo (Fig. 3.5).

1ª Situação: Veículo acabando de entrar no contrapeso já carregado com a carga de multidão (introduzindo momento fletor máximo no apoio) e o tabuleiro com uma pista totalmente carregada (introduzindo torção e, conseqüentemente, tensões de bi-momento) (Fig. 3.4).

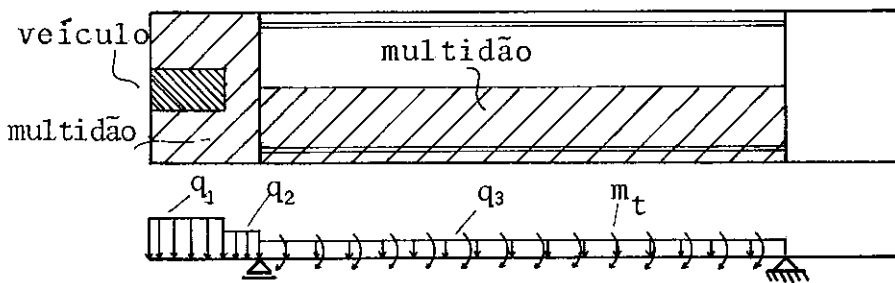


FIG. 3.4

2ª Situação: Contrapeso carregado com a multidão (introduzindo momento fletor) e o tabuleiro com uma pista totalmente carregada e com o veículo na posição que introduza o bi-momento máximo (Fig. 3.5).

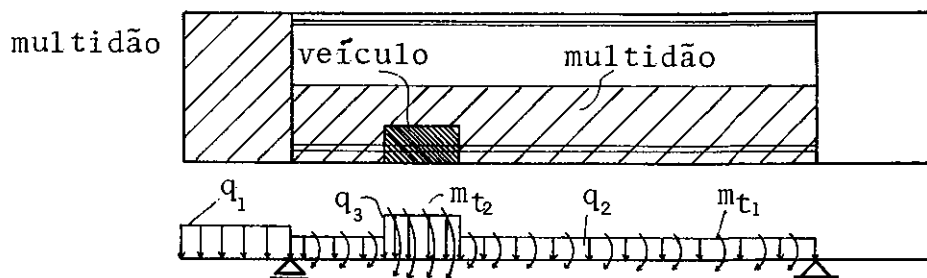


FIG. 3.5

### 3.3.2 Para as Tensões no Meio do Vão

A posição mais desfavorável do veículo, tanto para o momento fletor quanto para o bi-momento, ocorre quando ele está situado no meio do vão (Fig. 3.6). Quanto à carga de multidão, será feita uma análise para determinar o comprimento  $a$  de carregamento de tal forma que a soma de tensões  $\sigma_m + \sigma_b$  seja máxima. Note-se que  $\sigma_m$  é máxima para o tabuleiro totalmente carregado e  $\sigma_b$  é máxima para metade do tabuleiro carregado.

Os contrapesos ficam descarregados.

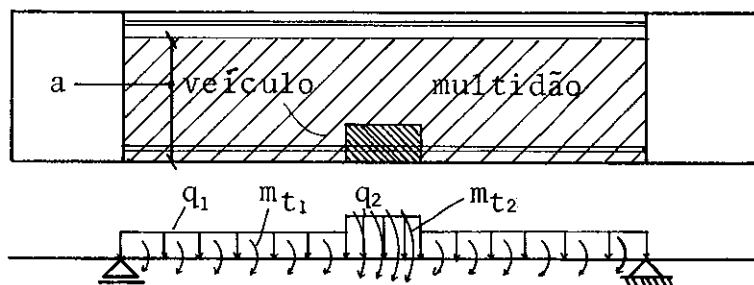


FIG. 3.6

### 3.4 Cálculo das Tensões em Serviço

Vimos que as situações mais desfavoráveis ocorrem com o carregamento assimétrico no vão interno (Fig. 3.7), ou

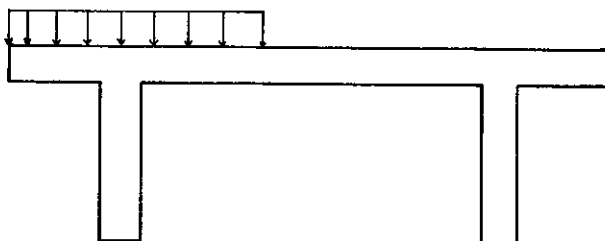


FIG. 3.7

simplificadamente, uma carga excêntrica (Fig. 3.8a), que podemos substituir pelo sistema estaticamente equivalente na Fig. 3.8b, com uma carga simétrica e um momento torsor aplicado:

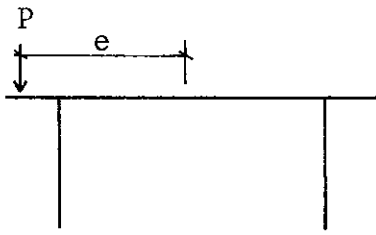


FIG. 3.8a

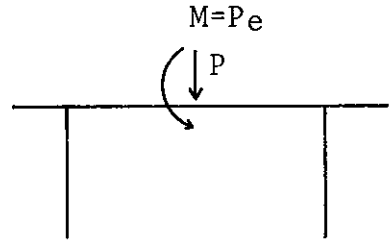


FIG. 3.8b

Calcularemos separadamente as tensões devidas à flexão ( $\sigma_m$ ) e devidas ao bi-momento ( $\sigma_b$ ).

O cálculo de  $\sigma_m$  será feito no estágio II e o cálculo de  $\sigma_b$ , por simplificação, no estágio I, utilizando a conhecida expressão:

$$\sigma_b = \frac{B}{J\omega} \cdot \omega$$

## CAPÍTULO IV

## APLICAÇÕES A UM PROJETO DE TIPO CORRENTE

Seja a ponte bi-apoiada de concreto armado e com contrapesos maciços da Fig. 4.1

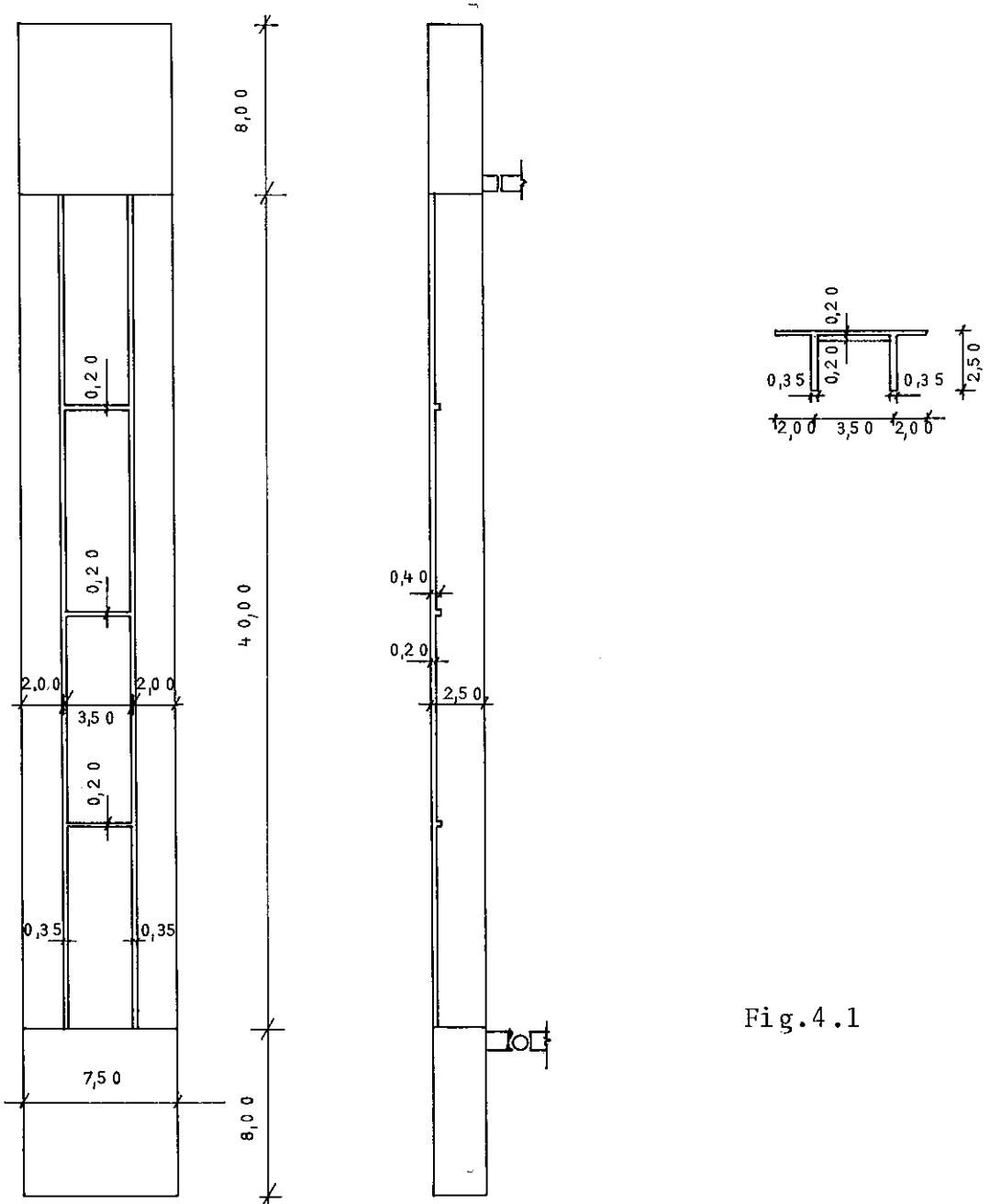


Fig.4.1

## 4.1 Dimensionamento à Flexão

### 4.1.1 Determinação do Carregamento

a) Peso próprio (carga permanente):

$$\text{Contrapeso: } 7,5 \times 2,5 \times 2,5 = 46,88 \text{ t/m}$$

Vão central:

$$- \text{Lajes: } 0,20 \times 7,5 \times 2,5 = 3,75 \text{ t/m}$$

$$- \text{Vigotas: } \frac{0,20 \times 0,20 \times 3,50 \times 2,5 \times 3}{40} = 0,03 \text{ t/m}$$

$$- \text{Vigas principais: } 2,30 \times 0,35 \times 2,5 \times 2 = 4,03 \text{ t/m}$$

$$q = 7,80 \text{ t/m}$$

Esquema estrutural:

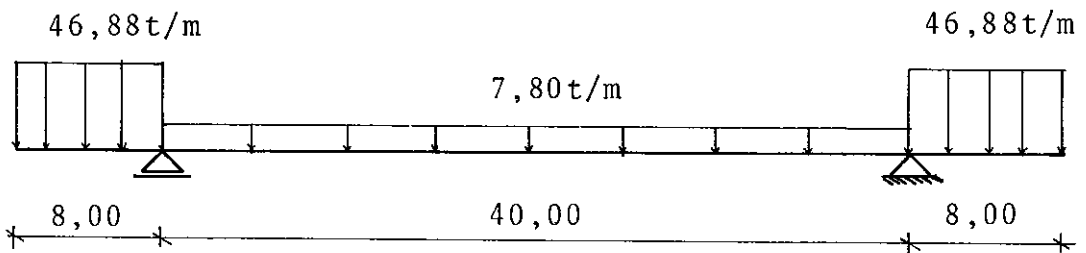
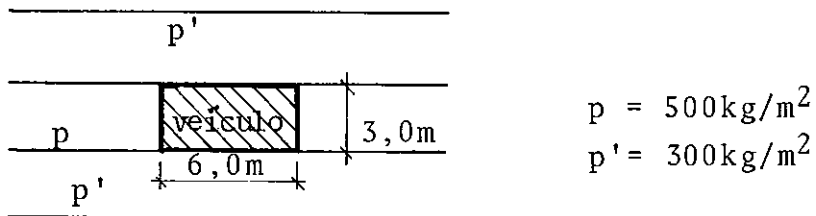


FIG. 4.2

b) Carga acidental:

A carga acidental será determinada de acordo com a NB6 para ponte em rodovia classe I (veículo tipo 36).

Trem tipo:



Simplificação de cálculo: vigas retas com mais de 30 m de vão, permite-se substituir a carga concentrada do veículo por carga igual, mas uniformemente distribuída sobre a área retangular ocupada pelo mesmo.

$$Q = \frac{36.000}{3 \times 6} = 2.000 \text{ kg/m}^2$$

$$Q' = Q - 500 = 1.500 \text{ kg/m}^2$$

O trem tipo passa a ser o da Fig. 4.4.

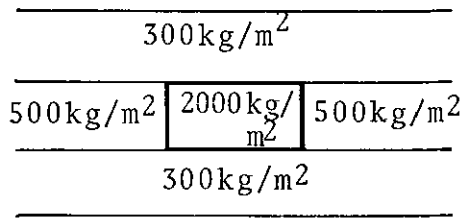


FIG. 4.4

Para o dimensionamento à flexão, devemos carregar o tabuleiro até a viga 2 e deixar o restante do tabuleiro descarregado, pois assim teremos a carga máxima na viga 1, como mostra a Fig. 4.5:

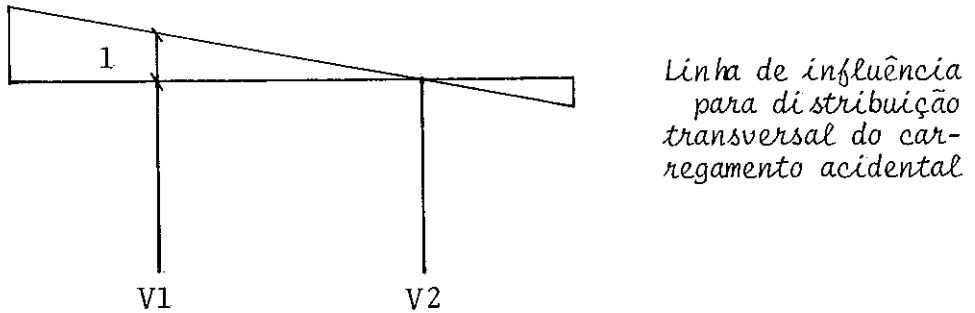


FIG. 4.5

Temos assim o carregamento mostrado na Fig. 4.6:

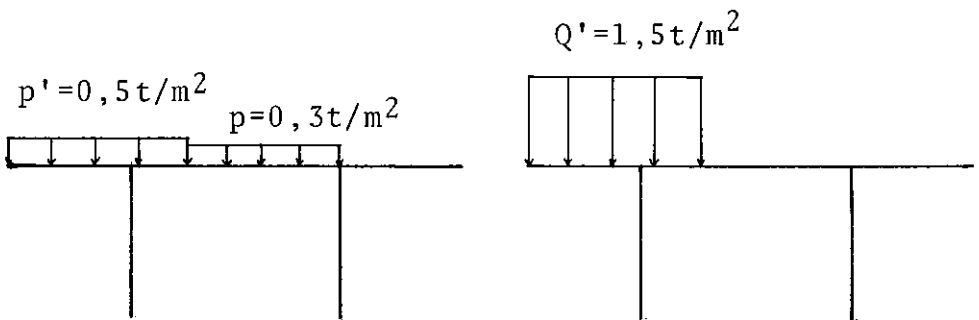
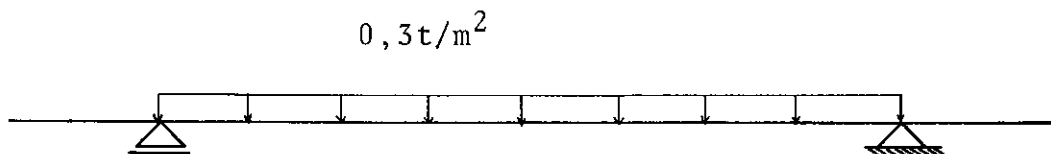
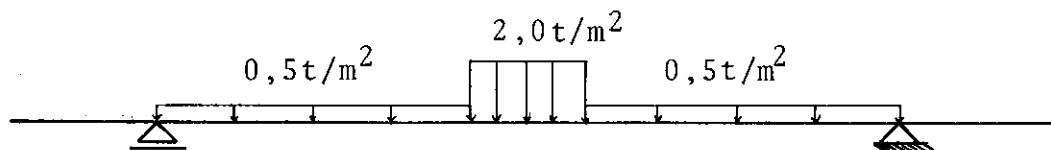


FIG. 4.6.a

FIG. 4.6.b



4.6.c - Faixa em que não trafega o veículo



4.6.d - Faixa em que trafega o veículo

A carga accidental fica, então:

b.1) Para o dimensionamento no apoio:

Teremos o contrapeso totalmente carregado e com o veículo acabando de entrar na ponte, assim (Fig. 4.7):

$$Q_1 = 0,5 \times 3,0 + 0,3 \times 4,5 = 2,85 \text{ t/m}$$

$$Q_2 = 1,5 \times 3,0 = 4,5 \text{ t/m}$$



FIG. 4.7

b.2) Para o dimensionamento no meio do vão:

Deixaremos os contrapesos descarregados e carregaremos o tabuleiro conforme a Fig. 4.6, obtendo:

b.2.1) carga devida à multidão

$$Q_1 = \frac{0,5 \times 2,0^2}{2} + \frac{0,3 \times 3,50}{2} + \frac{0,2 \times 1,5}{3,5} \left(2 + \frac{1,5}{2}\right) = 1,05 \text{ t/m}$$

b.2.2) carga devida ao veículo

$$Q'_1 = \frac{1,5 \times 2,0^2}{2} + \frac{1,5 \times 1,5}{3,5} \cdot \left(2 + \frac{1,5}{2}\right) = 2,63 \text{ t/m}$$

Teremos, então:

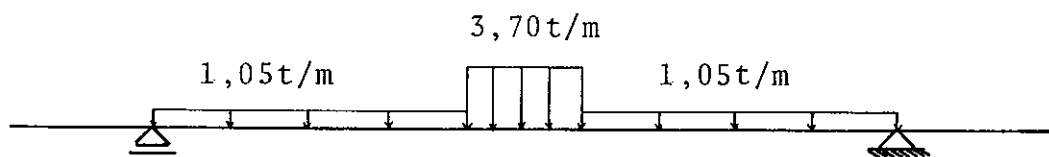


FIG. 4.8

#### 4.1.2 Cálculo dos Esforços Máximos:

a) Cálculo do momento máximo negativo:

– Carga permanente:

da Fig. 4.2, temos:

$$X_A = - \frac{46,88 \times 8^2}{2} = - 1.500 \text{ t.m}$$

– Carga acidental:

da Fig. 4.7, temos:

$$X_A = - \frac{285 \times 8^2}{2} - 4,5 \times 6 \times \left(2 + \frac{6}{2}\right) = 226 \text{ t.m}$$

Então, o momento máximo no apoio será:

$$X = - 1.500 - 226 = -1.726 \text{ t.m}$$

Para o dimensionamento das vigas, teremos:

$$X = - \frac{1.726}{2} = - 863 \text{ t.m em cada viga.}$$



b) Cálculo do momento máximo positivo:

– Carga permanente:

da Fig. 4.2, temos:

$$M = -1.500 + \frac{7,80 \times 40^2}{8} = 60 \text{ t.m}$$

Como a carga permanente é simétrica, cada viga deverá absorver a metade deste momento.

– Carga acidental:

da Fig. 4.8, temos:

$$M = \left( \frac{1,05 \times 40}{2} + \frac{2,63 \times 6}{2} \right) \times \frac{40}{2} - \frac{1,05 \times 20^2}{2} - \frac{2,63 \times 3^2}{2} = 356 \text{ t.m}$$

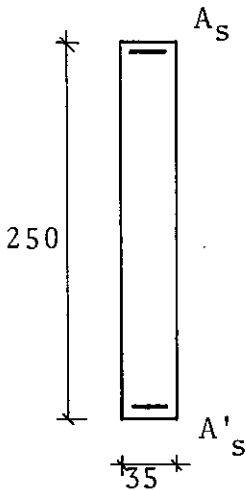
então, o momento máximo positivo (no meio do vão) será:

$$M = 386 \text{ t.m}$$

#### 4.1.3 Dimensionamento das Ferragens das Secções mais Solici- tadas:

a) No apoio:

Para os momentos nos apoios (negativos), as vigas trabalham como retangulares de dimensões 35 x 250 (Fig. 4.9):



$$M = 863 \text{ t.m}$$

$$f_{ck} = 300 \text{ kg/m}^2$$

CA50 B

FIG. 4.9

Calculando as áreas de aço de acordo com a NBE/78, obteremos:

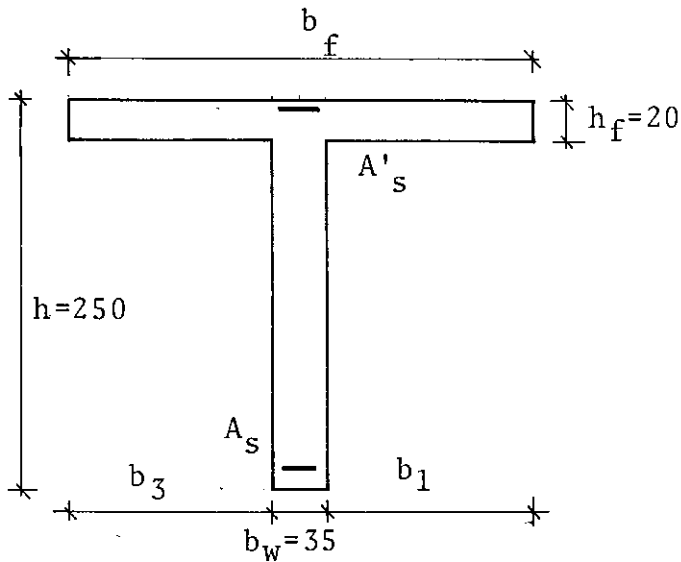
$$A_s = 140,0 \text{ cm}^2 \text{ e } A'_s = 10,30 \text{ cm}^2 \text{ e poderemos adotar}$$

$$A_s = 141,9 \text{ cm}^2 \longrightarrow 28 \varnothing 25 \text{ mm}$$

$$A'_s = 11,40 \text{ cm}^2 \longrightarrow 4 \varnothing 20 \text{ mm}$$

b) No meio do vão:

Para o momento no meio do vão (positivos) as vigas serão calculadas como vigas "T" (Fig. 4.10):



$$M = 386 \text{ tm}$$

$$f_{ck} = 300 \text{ kg/cm}^2$$

CA50B

FIG. 4.10

De acordo com a NB1/78, teremos:

$$b_3 = 120 \text{ cm}; \quad b_1 = 150 \text{ cm}$$

$$b_f = 305 \text{ cm}$$

$$b_w = 35 \text{ cm}$$

$$h_f = 20 \text{ cm}$$

Dimensionando, teremos:

$$A_s = 52,23 \text{ cm}^2, \quad A'_s = 0, \text{ e adotaremos}$$

$$A_s = 54,30 \text{ cm}^2 \rightarrow 14 \varnothing 20\text{mm}$$

$$A'_s = 2,53 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \varnothing 12,5\text{mm}$$

#### 4.2 Determinação das Características Geométricas da Secção Transversal

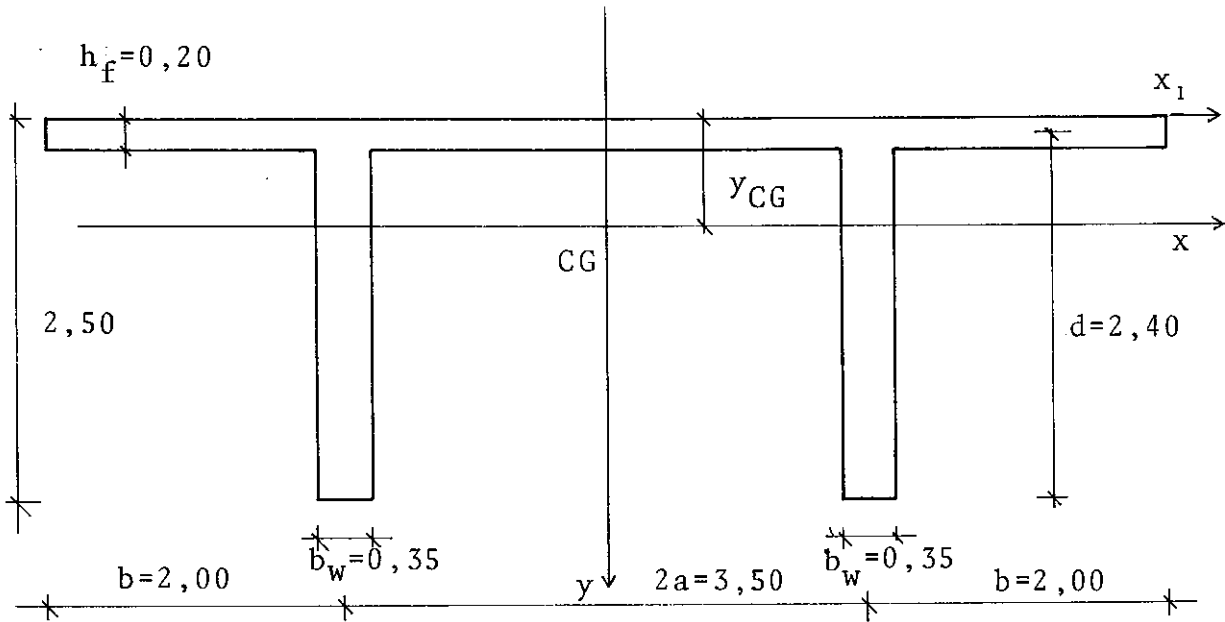


FIG. 4.11

a) Centro de Gravidade

$$y_{cg} = \frac{0,20 \times 7,50 \times 0,10 + 2 \times 0,35 \times 2,30 \times \left( \frac{2,30}{2} + 0,20 \right)}{0,20 \times 7,50 + 2,0 \times 0,35 \times 2,30} = 0,7471 \text{ m}$$

$$y_{cg} = 74,71 \text{ cm}$$

b) Momento de Inércia

$$J_y = \frac{0,20 \times 7,50^3}{12} + 2 \times \left[ \frac{2,30 \times 0,35^3}{12} + \left( \frac{3,50}{2} \right)^2 \times 0,35 \times 2,30 \right]$$

$$J_y = 11,98 \text{ m}^4$$

#### 4.3 Determinação das Características Setoriais

##### a) Centro de cisalhamento:

Para esta secção, temos a equação 2.1:

$$y'_A = - \frac{(a.d)^2 b_w}{J_y} ; \quad x_A = 0 \text{ (pois a secção é simétrica em relação ao eixo Y).}$$

$$\text{onde } a = \frac{3,50}{2} = 1,75 \text{ m}$$

$$d = 2,40 \text{ m}$$

$$b_w = 0,35 \text{ m}$$

$$J_y = 11,98 \text{ m}^4$$

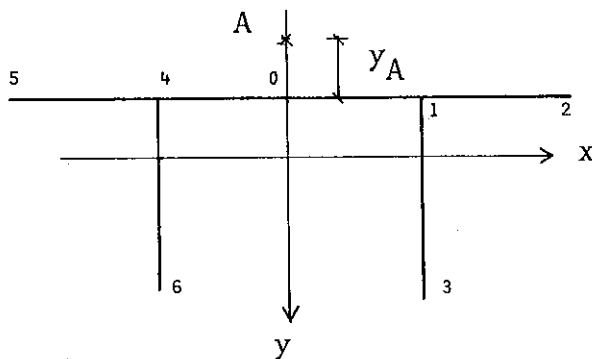
$$y'_A = - \frac{(1,75 \times 2,40)^2 \times 0,35}{11,98}$$

$$y'_A = - 0,515 \text{ m}$$

$$y_A = 0,515 \text{ m}$$

$$x_A = 0$$

##### b) Diagrama dos coeficientes de empenamento ( $\omega$ ) referidos ao centro de cisalhamento:



Do Cap. II, temos:

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega_1 = y_A \cdot a = 0,902 \text{ m}^2$$

$$\omega_2 = \omega_1 - y_A \cdot b = -1,933 \text{ m}^2$$

$$\omega_3 = \omega_1 + a \cdot d = 3,298 \text{ m}^2$$

$$\omega_4 = -\omega_1$$

$$\omega_5 = -\omega_2$$

$$\omega_6 = -\omega_3$$

O diagrama será:

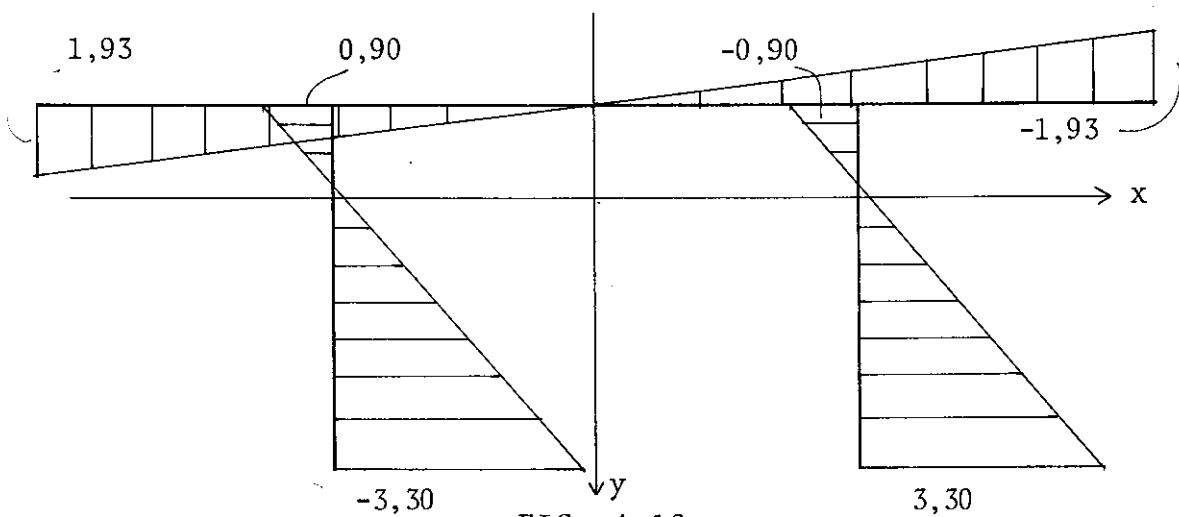


FIG. 4.12

#### 4.4 Cálculo do Momento Setorial de Inércia:

$$J_{\omega} = \frac{2}{3} \{ h_f (a + b) \omega_2^2 + b_w d (\omega_1^2 + \omega_3^2 + \omega_1 \omega_3) \} \quad \text{Equação 2.2}$$

Substituindo, vem:

$$J_{\omega} = 6,7487 \text{ m}^6$$

#### 4.5 Momento de Inércia à Torção:

$$J_t = \frac{2}{3} \left[ (a + b) h_f^3 + d b_w^3 \right] \quad \text{Equação 2.3}$$

Substituindo:

$$J_t = 0,0886 \text{ m}^4$$

Podemos agora calcular a grandeza  $\gamma = \sqrt{\frac{GJ_t}{EJ_{\omega}}}$

$$\gamma = \sqrt{\frac{J_t}{2,4J_{\omega}}} = 0,073961/\text{m}$$

#### 4.6 Linhas de Influência do Bi-Momento:

Os contrapesos, sendo maciços, impedem o empenamento da secção no apoio. Então, para o bi-momento, a ponte será considerada como engastada nas extremidades e com o empenamento impedido ( $\phi = 0$ ;  $\phi' = 0$ ).

Então, para o traçado das linhas de influência, podemos utilizar as equações 3.1, obtendo os seguintes valores numéricos (\*):

a) Para o bi-momento no meio do vão:

Valores calculados de 1 em 1 metro, desde zero até 40 m.

L.I. traçada na Fig. 4.13.

0.00000  
0.00889  
0.03561  
0.08030  
0.14321  
0.22469  
0.32518  
0.44522  
0.58548  
0.74673  
0.92984  
1.13582  
1.36580  
1.62103  
1.90292  
2.21299  
2.55296  
2.92468  
3.33019  
3.77170  
4.25163  
3.77170  
3.33019  
2.92468  
2.55296  
2.21299  
1.90292  
1.62103  
1.36580  
1.13582  
0.92984  
0.74673  
0.58548  
0.44522  
0.32518  
0.22469  
0.14321  
0.08030  
0.03561  
0.00889  
0.00000

(\*) Valores estes obtidos com auxílio do programa listado no apêndice I.

b) Para o bi-momento no apoio:

Valores calculados de 1 em 1  
metro, desde zero até 40 m.

L.I. - Fig. 4.14.	0.00000
	-0.93842
	-1.75984
	-2.47303
	-3.08615
	-3.60682
	-4.04217
	-4.39885
	-4.68307
	-4.90066
	-5.05707
	-5.15743
	-5.20657
	-5.20900
	-5.16902
	-5.09068
	-4.97781
	-4.83406
	-4.66291
	-4.46770
	-4.25163
	-4.01777
	-3.76913
	-3.50860
	-3.23902
	-2.96320
	-2.68388
	-2.40381
	-2.12572
	-1.85236
	-1.58650
	-1.33096
	-1.08859
	-0.86235
	-0.65525
	-0.47045
	-0.31119
	-0.18087
	-0.08304
	-0.02144
	0.00000

ESC. HOR. 1:200  
VER. 1:100

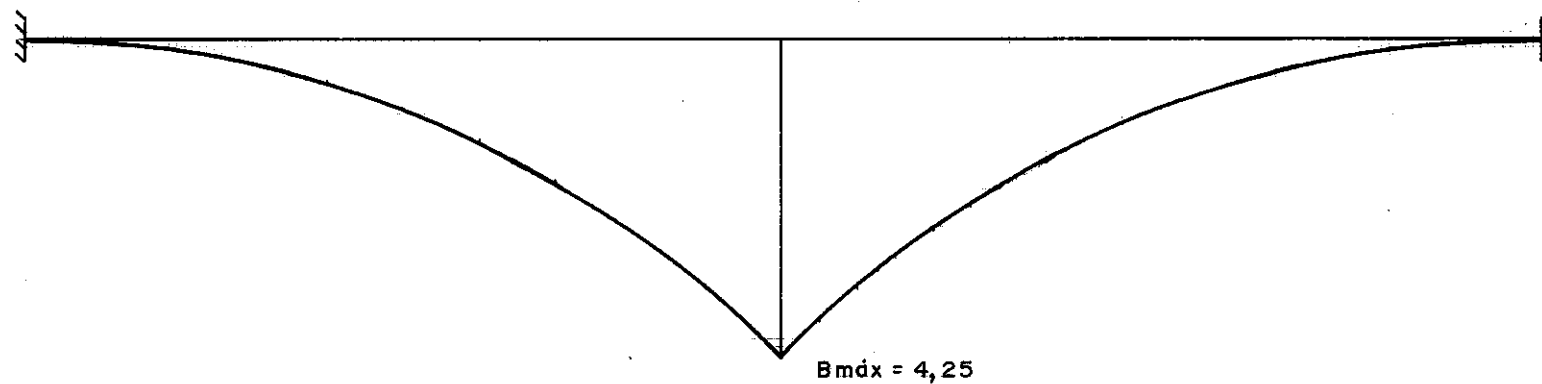


FIG. 4.13 LINHA DE INFLUÊNCIA DO BI-MOMENTO PARA MEIO DO VÃO



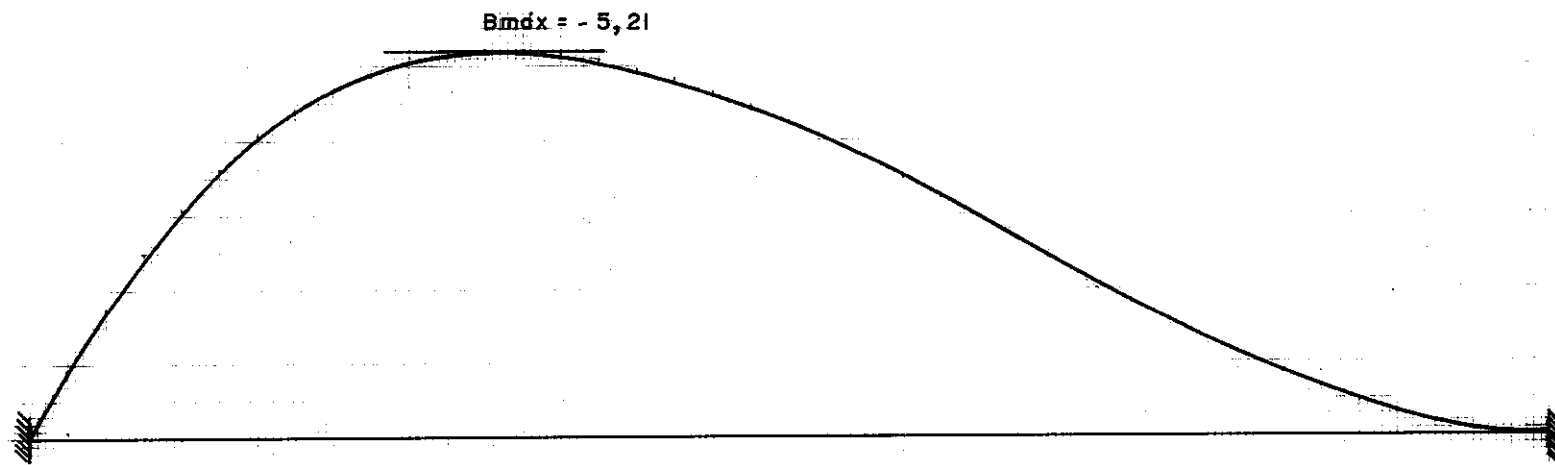


FIG 4.14 LINHA DE INFLUÊNCIA DO BI-MOMENTO PARA O APOIO ESQUERDO

#### 4.7 Linhas de Influência dos Momentos Fletores:

a) No apoio (Fig. 4.15):



FIG. 4.15

b) No meio do vão (Fig. 4.16):

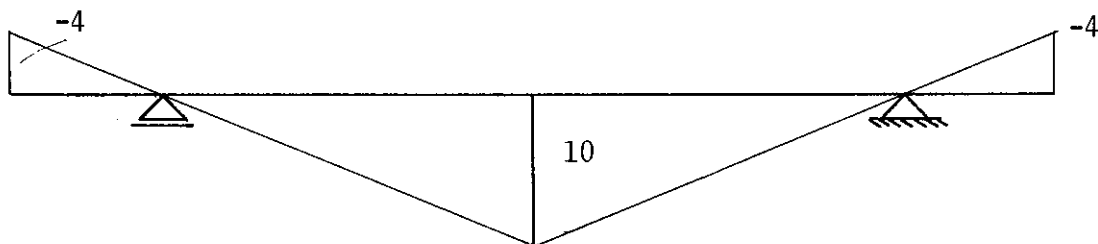


FIG. 4.16

#### 4.8 Cálculo das Tensões:

##### 4.8.1 Tensões no Apoio:

Calcularemos as tensões no apoio para as duas situações mostradas no item 3.3.1 (Cap. III).

1ª Situação: Veículo acabando de entrar no contrapeso.

a) Tensões de flexão:

Temos, para este caso, o momento fletor calculado anteriormente:

$$X = 1.726 \text{ t.m}$$

Temos, no apoio, a situação mostrada na Fig. 4.17; a secção será considerada, para o cálculo das tensões de flexão, como sendo duas vigas retangulares, cada qual absorvendo metade do momento fletor.

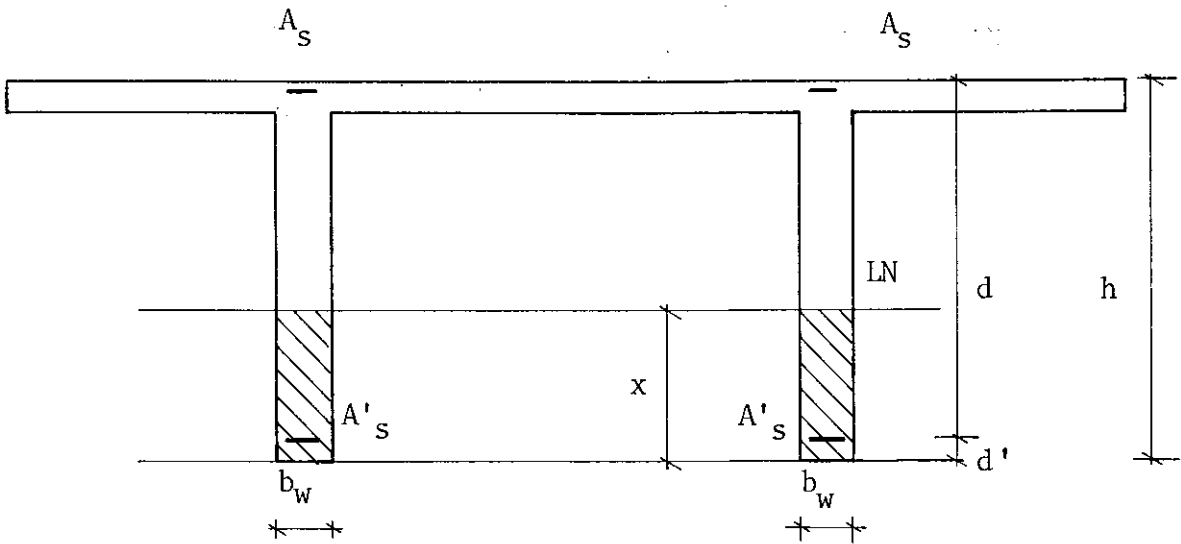


FIG. 4.17

$$\sigma_c = \frac{M}{I} y$$

$$\sigma_s = \frac{M}{I} (d - x) . n$$

Podemos utilizar o programa listado no apêndice 3, entrando com os seguintes dados:

$$f_{ck} = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$b_f = 35 \text{ cm} = b_w$$

$$d = 240 \text{ cm}$$

$$d' = 10 \text{ cm}$$

$$A_s = 141,9 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = 11,4 \text{ cm}^2$$

$$h_f = 0$$

300.	FCK
35.	BF
35.	BW
240.	D
10.	D'
141.9	AS
11.4	AS'
0.	HF
345926.7986	EC
6.070648497	N
85.48363016	X
1.712363585	RC
28248891.99	I

Temos então:

$$M = 863 \text{ t.m}$$

$$\sigma_c = \frac{863 \times 1.000 \times 100}{28248892} y = 3,05 y$$

$$\sigma_c \text{ máx.} = 261 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s = 2.865 \text{ kg/cm}^2$$

b) Tensões devidas ao bi-momento:

Quando o veículo acaba de entrar na ponte, a situação mais desfavorável para o bi-momento será o vão interno com uma pista totalmente carregada com a carga de multidão (Fig. 4.18):

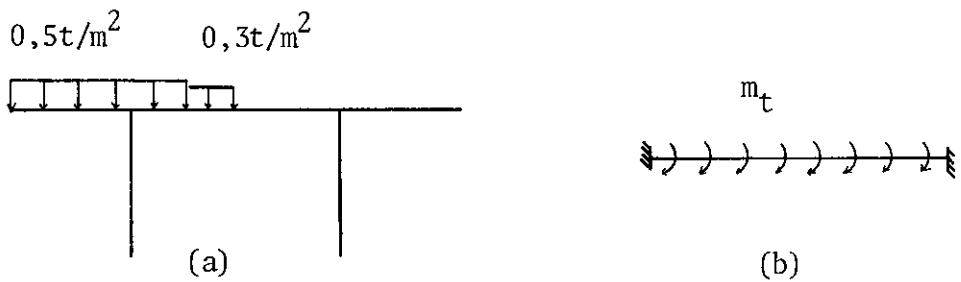


FIG. 4.18

$$m_t = \frac{0,3 \times 3,75^2}{2} + 0,2 \times 3 \times (3,75 - 1,5) = 3,46 \text{ tm/m}$$

Para o caso mostrado na Fig. 4.18b, temos, do Cap. I, a equação:

$$B = \frac{1}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{\gamma \ell}{2 \text{tgh} \frac{\gamma \ell}{2}} \cdot \frac{\text{sh} \gamma z - \text{sh} \gamma z'}{\text{sh} \gamma \ell} \right)$$

com a qual podemos calcular os valores para traçar o diagrama de bi-momento da Fig. 4.19 (\*).

```

-117.21
-98.01
-80.35
-64.13
-49.26
-35.66
-23.26
-11.99
-1.78
7.42
15.66
22.99
29.44
35.05
39.85
43.87
47.13
49.64
51.43
52.50
52.85
52.50
51.43
49.64
47.13
43.87
39.85
35.05
29.44
22.99
15.66
7.42
-1.78
-11.99
-23.26
-35.66
-49.26
-64.13
-80.35
-98.01
-117.21

```

(\*) Os valores foram obtidos com auxílio do programa do apêndice 2.

ESC. HOR. 1:200

VER. 1 cm = 20 m<sup>2</sup>

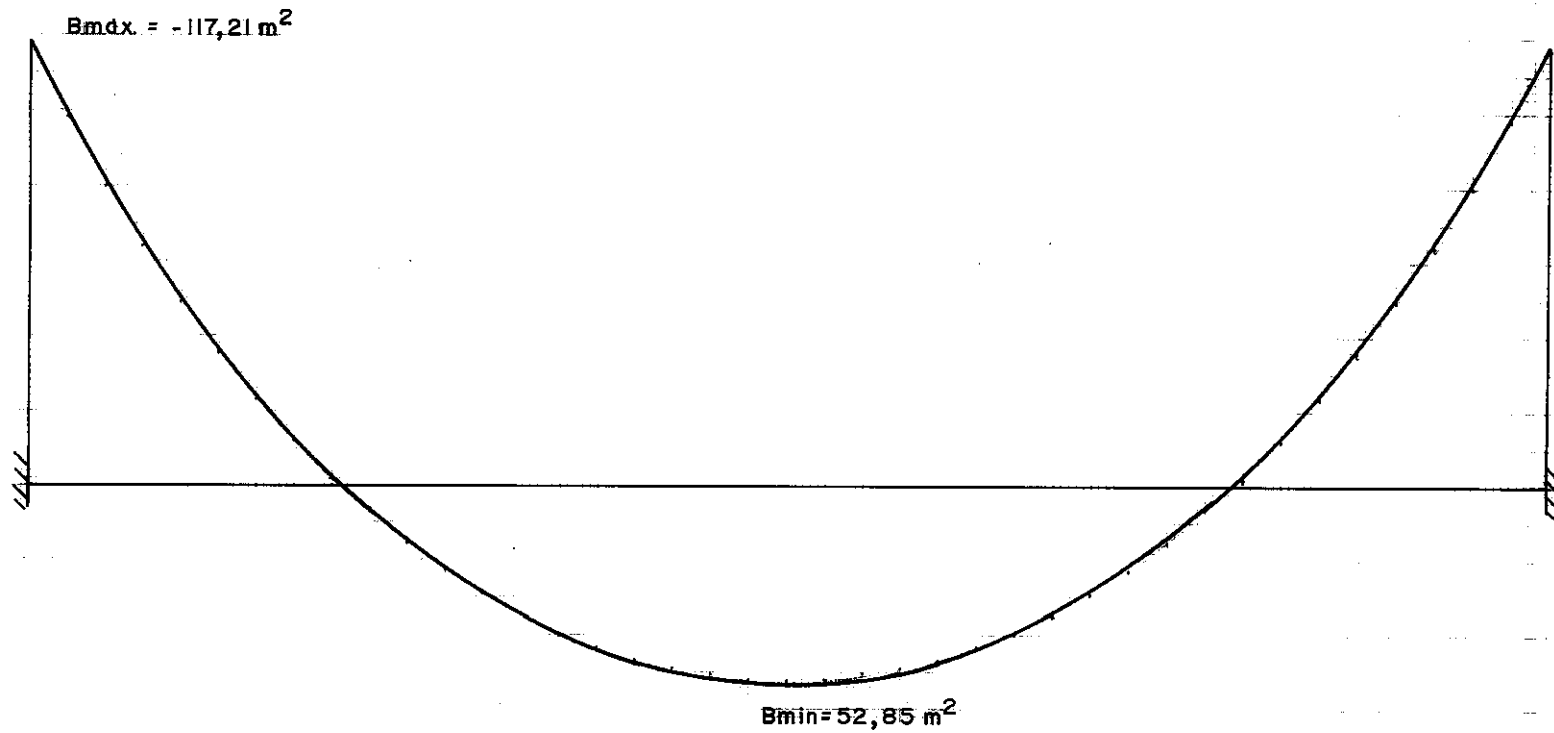


FIG. 4.19 DIAGRAMA DE BI. MOMENTOS PARA UM MOMENTO TORSOR UNITÁRIO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO

No apoio, temos que:

$$B = 3,46 \times 117,21 = 405,47 \text{ tm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{B}{J\omega} \omega = \frac{405,47}{6,75} \omega = 60,08 \omega$$

Com  $\omega$  dado na Fig. 4.12.

As tensões ficam, então:

$$\sigma_1 = 60,08 \times \omega_1 = 60,08 \times (-0,90) = -54,1 \text{ t/m}^2 = -5,41 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 60,08 \times \omega_2 = 60,08 \times (-1,93) = -116,0 \text{ t/m}^2 = -11,60 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 60,08 \times \omega_3 = 60,08 \times 3,30 = 198,3 \text{ t/m}^2 = 19,83 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_4 = -\sigma_1$$

$$\sigma_5 = -\sigma_2$$

$$\sigma_6 = -\sigma_3$$

Na Fig. 4.20 está representado o diagrama de tensões devidas ao bi-momento:

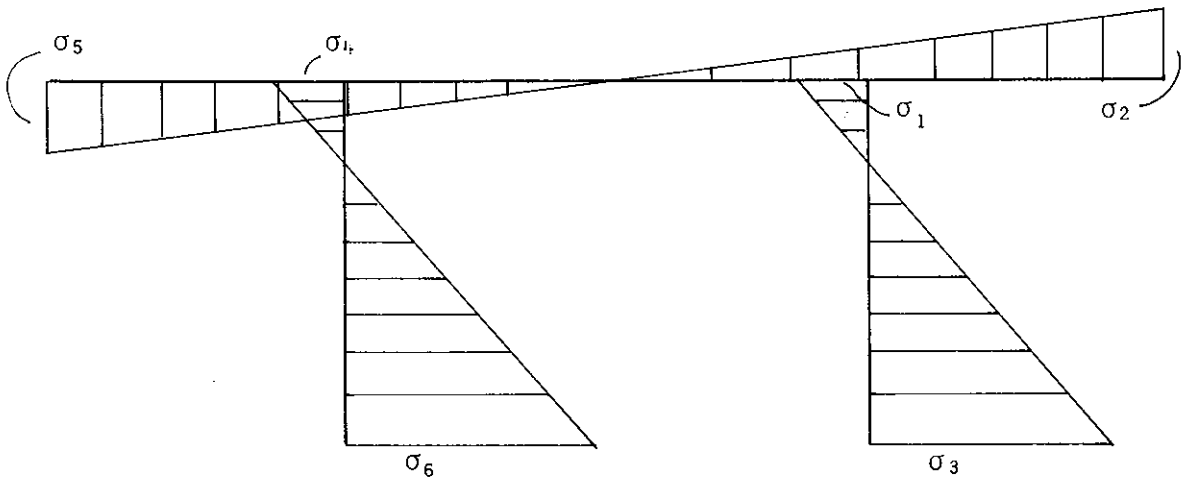


FIG. 4.20

Vejamos agora a outra situação desfavorável para as tensões no apoio.

2ª Situação: Veículo no vão interno da ponte.

a) Tensões de flexão:

Neste caso, a situação mais desfavorável ocorre com o contrapeso totalmente carregado com a carga de multidão. Temos assim:

$$X = -1.500 - \frac{285 \times 8^2}{2} = -1.591,2 \text{ t.m}$$

e cada viga retangular absorverá metade deste momento.  
 $M = 796 \text{ t.m}$

$$\sigma_c = \frac{M}{I} y = \frac{796 \times 1.000 \times 100}{28248892} y = 2,82 y$$

$$\sigma_c \text{ máx.} = 241 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s = 2642 \text{ kg/cm}^2$$

b) Tensões devidas ao bi-momento:

Como já foram calculadas as tensões devidas à carga de multidão, calcularemos agora apenas as tensões devidas à passagem do veículo (Fig. 4.21):

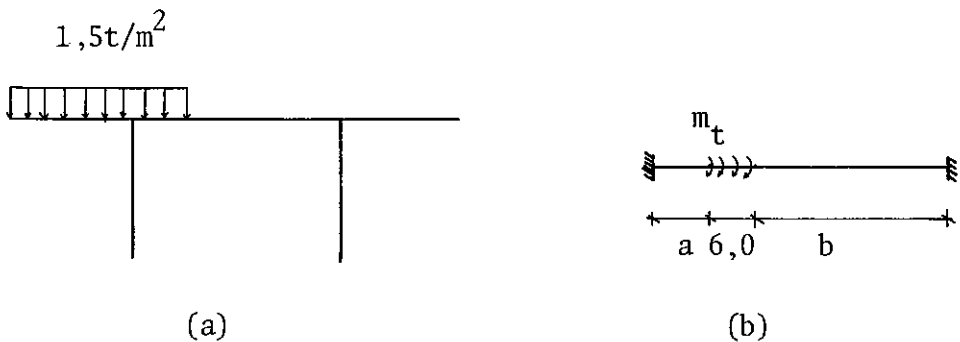


FIG. 4.21



$$m_t = 1,5 \times 3 \times (0,75 + 1,50) = 10,13 \text{ t.m/m}$$

Para determinarmos a posição do veículo que produz o bi-momento máximo, utilizaremos a linha de influência da Fig. 4.14.

A posição mais desfavorável do veículo será aquela em que a área sob a L.I. seja máxima, como é mostrado esquematicamente na Fig. 4.22:

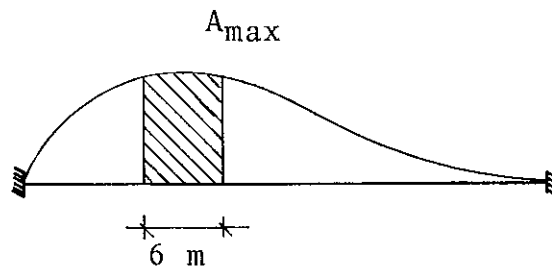


FIG. 4.22

$$B = m_t \ A \text{ máx.}$$

$$m_t = 10,13 \text{ tm/m}$$

$$A \text{ máx.} = 30,87 \text{ m}^2 \ (*)$$

$$B = 312,7 \text{ t.m}^2$$

$$\sigma_b = \frac{B}{J\omega} \cdot \omega = \frac{312,7}{6,75} \omega = 46,34 \omega$$

com  $\omega$  dado na Fig. 4.12.

As tensões ficam, então:

$$\sigma_1 = -41,8 \text{ t/m}^2 = -4,18 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -89,6 \text{ t/m}^2 = -8,96 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 152,8 \text{ t/m}^2 = 15,28 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_4 = -\sigma_1$$

$$\sigma_5 = -\sigma_2$$

$$\sigma_6 = -\sigma_3$$

(\*) Calculada utilizando a regra de Simpson.

As tensões devidas ao bi-momento são, então:

$$\sigma_1 = -5,41 - 4,18 = -9,59 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -11,60 - 8,96 = -20,56 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 19,83 + 15,28 = 35,11 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_4 = -\sigma_1$$

$$\sigma_5 = -\sigma_2$$

$$\sigma_6 = -\sigma_3$$

O diagrama terá o mesmo aspecto do da Fig. 4.20.

#### 4.8.2 Tensões no Meio do Vão:

Façamos a análise dita no item 3.3.2 para determinar o carregamento mais desfavorável.

Sabemos, a priori, que o veículo estará situado no meio do vão. Falta determinarmos o comprimento a da carga de multidão p'. (Fig. 4.23):

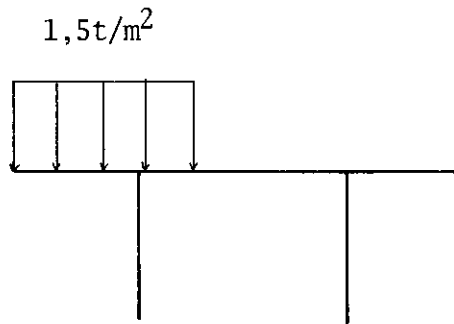


FIG.4.23 - a) Carga devido ao veículo

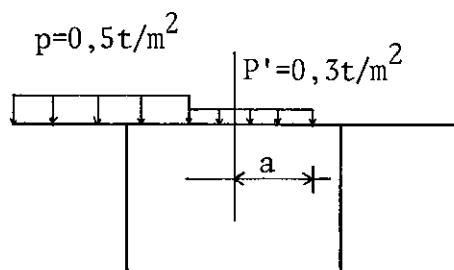
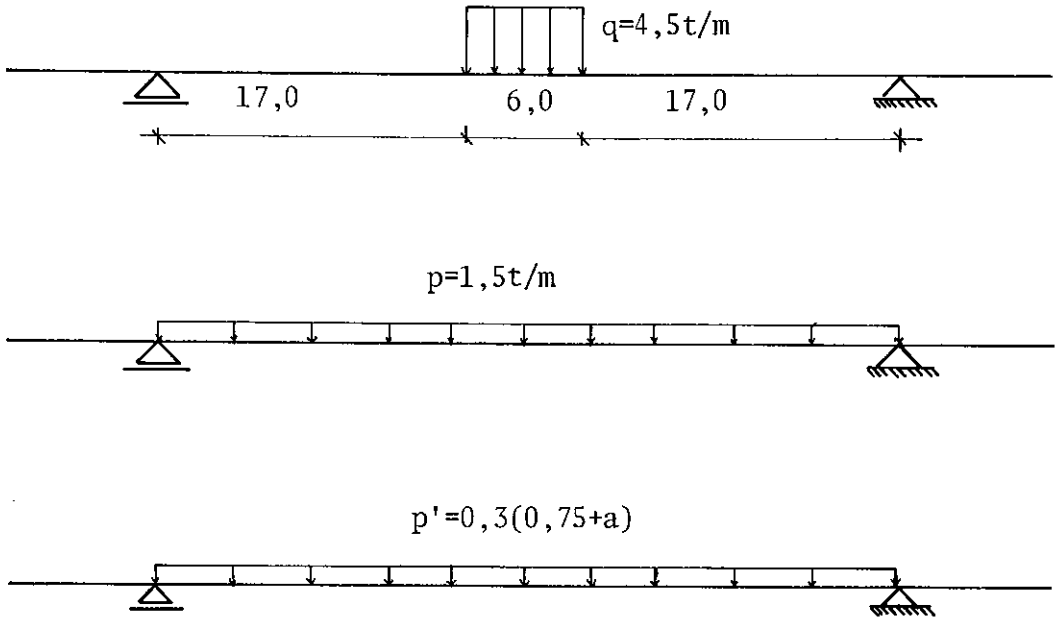
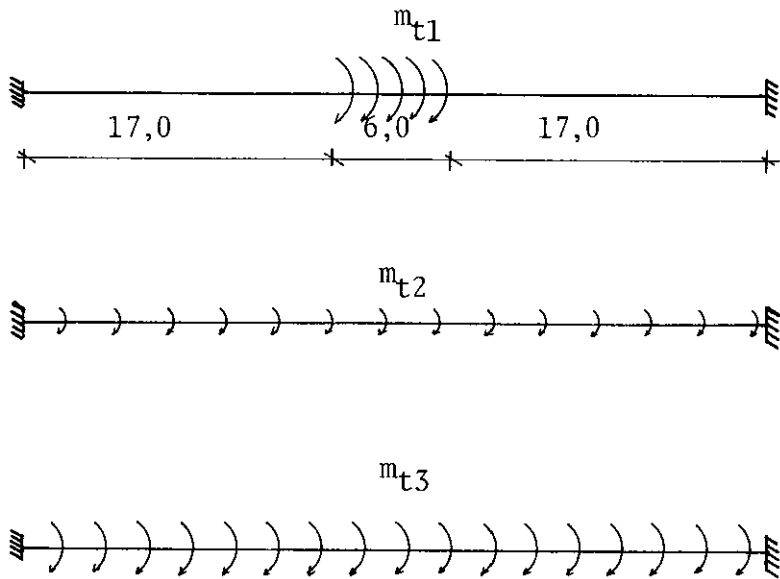


FIG.4.23 - b) Carga de Multidão

Nestas condições temos, ao longo da ponte:



E os momentos torsores:



em que:

$$m_{t1} = 1,5 \times 3 \times (0,75 \times 1,5) = 10,13 \text{ tm/m}$$

$$m_{t2} = 0,5 \times 3(0,75 + 1,5) = 3,38 \text{ tm/m}$$

$$m_{t3} = 0,3 \times \frac{0,75^2}{2} - 0,3 \times \frac{a^2}{2} = 0,15 (0,75^2 - a^2) \text{ tm/m}$$

com a em metros.

O momento fletor no meio do vão será:

Carga permanente:  $M_0 = 60 \text{ t.m}$

$$\text{Carga acidental} \begin{cases} \text{veículo: } M_1 = 250 \text{ t.m} \\ \text{carga p: } M_2 = 300 \text{ t.m} \\ \text{carga p': } M_3 = 0,3 \times (0,75 + a) \times \frac{40^2}{8} = \\ = (45 + 60a) \text{ t.m} \end{cases}$$

Então,  $M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 = (655 + 60a) \text{ t.m}$

O bi-momento no meio do vão será:

$$B = B_0 + B_1 + B_2 + B_3$$

$B_0 = 0$ , pois a carga permanente é simétrica.

$$B_1 = M_{t1} \cdot A_1$$

Onde  $A_1$  é a área sob a linha de influência do bi-momento no meio do vão, esquematicamente mostrada na Figura 4.24

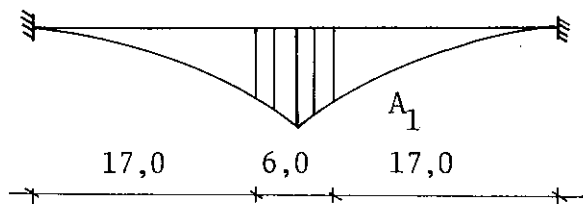


FIG. 4.24

$$A_1 = 21,53 \text{ m}^2$$

$$B_1 = 10,13 \times 21,53 = 218 \text{ t.m}^2$$

$$B_2 = M_{t2} \cdot 52,85 = 179 \text{ t.m}^2$$

$$B_3 = M_{t3} \cdot 52,85 = 0,15 (0,75^2 - a^2) \times 52,85$$

$$B_3 = (4,5 - 80a^2) \text{ t.m}^2$$

Então, o bi-momento no meio do vão tem o seguinte valor:

$$B = (402 - 8a^2) \text{ t.m}^2$$

com a em metro.

CÁLCULO DAS TENSÕES:

## a) Flexão:

Para o momento no meio do vão (positivo), o tabuleiro estará comprimido. Teremos a seguinte secção transversal (Fig. 4.25).

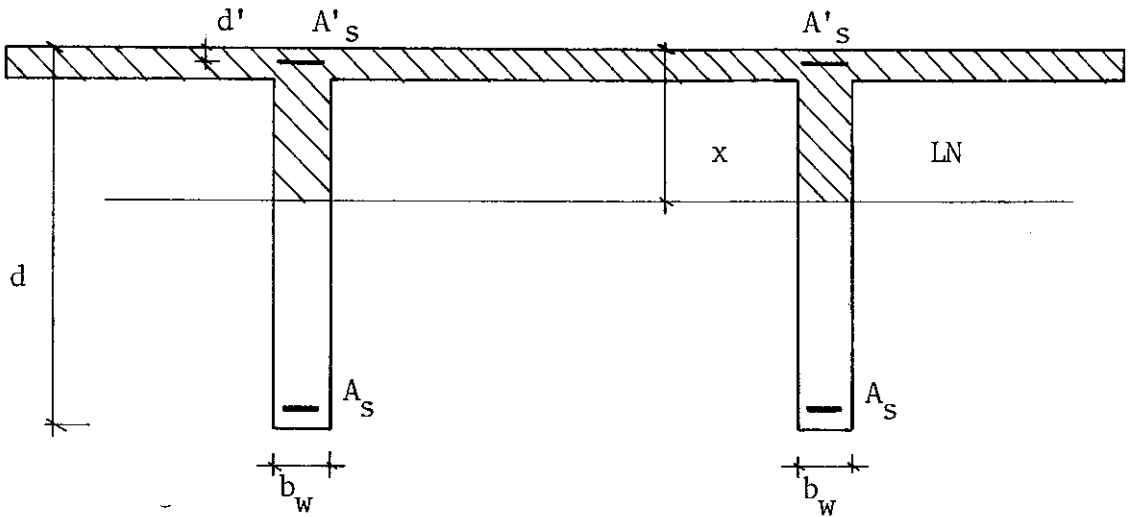


FIG. 4.25

$$\sigma_c = \frac{M}{I} y$$

$$\sigma_{c\text{máx.}} = \frac{M}{I} x$$

Para o cálculo de  $x$  e  $I$  podemos utilizar o programa do Apêndice 3, observando o seguinte:

$A_s$  e  $A'_s$  serão as áreas totais de aço na secção e  $b_w$  será a soma das larguras das 2 nervuras.

Assim, obteremos:

300.	FCK
	BF
750.	BW
70.	D
240.	D'
10.	AS
108.6	AS'
5.04	HF
20.	
345926.7986	EC
6.070648497	N
19.66163121	X
1.163846927	RC
33910068.04	I

Com estes resultados, podemos calcular as tensões de flexão:

$$\begin{aligned}\sigma_m = \sigma_c \text{ máx.} &= \frac{(655 + 60a) \times 1.000 \times 100 \times 19,66}{33910085} = \\ &= (38 + 3,5a) \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

b) Bi-momento:

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega \\ \sigma_{b\text{max}} &= \frac{(402 - 8a^2)}{6,75} \cdot 1,93 = (115 + 2,3a^2) \text{ t/m}^2 \\ \sigma_b \text{ máx.} &= (11,5 - 0,23 a^2) \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

A tensão máxima, de compressão, será:

$$\sigma = \sigma_{CM} + \sigma_b = 38 + 3,5a + 11,5 - 0,23a^2 = 49,5 + 3,5a - 0,23a^2$$

que terá seu valor máximo quando

$$\frac{d\sigma}{da} = 0$$

$$\frac{d\sigma}{da} = 3,5 - 0,46a = 0 \quad \therefore \underline{a = 7,61 \text{ m}}$$

Como o valor de a é maior que a metade da largura do tabuleiro, tomaremos para a o seu valor máximo possível, ou seja:

$$a = 3,75 \text{ m}$$

Então temos:

$$M = 655 + 60 \times 3,75 = 880 \text{ t.m}$$

$$B = 402 - 8 \times (3,75)^2 = 290 \text{ t.m}^2$$

$$\begin{aligned}\text{e } \sigma_c &= \frac{M}{I} y = 2,60 \text{ y} \\ \sigma_{c\text{max.}} &= 2,60 \times 19,66 = 51,02 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_s = \frac{n(d-x)}{I} M = 3471 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{B}{J_\omega} \omega = \frac{290}{6,75} \omega = 42,97 \omega$$

$$\sigma_{b_1} = 42,97 \times (-0,90) = -38,8 \text{ t/m}^2 = -3,88 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{b_2} = 42,97 \times (-1,93) = -83,1 \text{ t/m}^2 = -8,31 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{b_3} = 42,97 \times (3,30) = 141,7 \text{ t/m}^2 = 14,17 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{b_4} = -\sigma_{b_1}$$

$$\sigma_{b_5} = -\sigma_{b_2}$$

$$\sigma_{b_6} = -\sigma_{b_3}$$

e o diagrama de tensões será (Fig. 4.26):

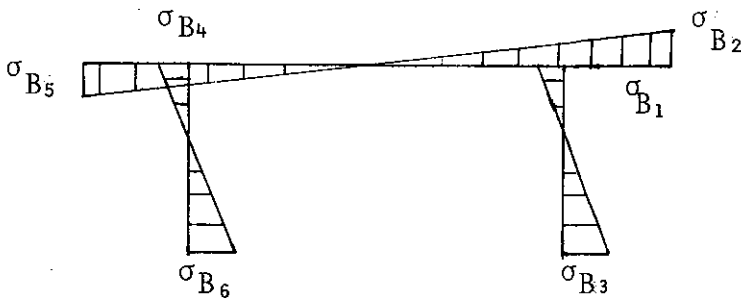


FIG. 4.26

#### — RESULTADOS NUMÉRICOS

Tensões máximas de compressão no apoio

1.<sup>a</sup> Situação: com o veículo acabando de entrar no con  
trapeso.

$$\sigma_{c_{m\acute{a}x.}} = 261 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{b_{m\acute{a}x.}} = 19,8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m\acute{a}x.} = 281 \text{ kg/cm}^2$$

2.<sup>a</sup> Situação: com o veículo já no vão interno.

$$\sigma_{c_{m\acute{a}x.}} = 241 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{b_{m\acute{a}x.}} = 35,1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m\acute{a}x.} = 276 \text{ kg/cm}^2$$

Tensões máximas de compressão no meio do vão

$$\sigma_{c_{m\acute{a}x.}} = 51 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{b_{m\acute{a}x.}} = 8,3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m\acute{a}x.} = 59 \text{ kg/cm}^2$$



## CONCLUSÃO

Analisando os resultados numéricos obtidos, sintetizados no final do Cap.IV, verificamos que a tensão máxima devida ao bi-momento ocorre no apoio e atinge cerca de 13% da tensão total de compressão, enquanto que no meio do vão sobe a 14% da tensão total, porém esta é, numericamente, bastante inferior à tensão no apoio.

Uma vez que o objetivo do trabalho é obter a ordem de grandeza das tensões devidas ao bi-momento, algumas simplificações e aproximações foram admitidas, tais como:

- As vigotas transversais da ponte, por serem de pequenas dimensões, não foram levadas em conta no cálculo das tensões devidas ao bi-momento.
- A ponte foi considerada como peça de parede delgada, embora a relação entre espessura e altura da secção seja pouco maior do que 0,1.
- Para o cálculo das tensões devidas ao bi-momento, admitiu-se a estrutura no estágio I e para cálculo das tensões de flexão admitiu-se a estrutura no estágio II.

Deixamos para um estudo mais avançado a consideração da estrutura no estágio II, ou até mesmo no estágio III, para o cálculo das tensões tanto de flexão como de bi-momento.

De qualquer modo, de um caso isolado como este não é possível generalizar conclusões amplas.

No entanto, o exemplo escolhido é bem como que uma média de casos correntes. Vimos que os valores a que chegamos introduziram acréscimos muito modestos às tensões de flexão. É de supor que, embora as percentagens determinadas variem em cada caso, pelas peculiaridades próprias às relações dimensio-

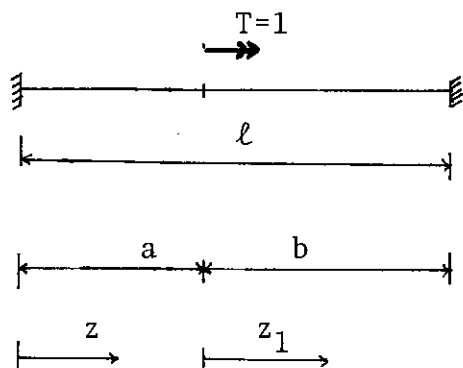
nais no concreto armado, esses acréscimos não sejam jamais expressivos. São em situações de peças muito delgadas, como ocorre nas estruturas protendidas, torna-se possível que as tensões devidas ao bi-momento, apresentem grandezas realmente ponderáveis. É essa portanto uma situação que fica ainda por ser examinada.

APÊNDICES

- APÊNDICE 1: Programa para Cálculo das Ordenadas de Li  
nhas de Influência do Bi-Momento em uma  
Viga Bi-Engastada.
- APÊNDICE 2: Programa para Cálculo das Ordenadas do  
Diagrama de Bi-Momentos para uma Viga Bi-  
Engastada Sujeita a um Momento Torsor Uni  
tário Uniformemente Distribuído.
- APÊNDICE 3: Programa para Cálculo de Parâmetros Utili  
zados nos Cálculos de Tensões de Flexão e  
Flecha de Vigas Retangulares ou "T" (Está  
dio II).

APÊNDICE I

Programa para Cálculo das Ordenadas de Linhas de Influência do Bi-Momento em uma Viga Bi-Engastada.



uso do programa:

Introduzir inicialmente nos registros de dados os seguintes valores:

Registro	Valor a ser Introduzido
$R_{00}$	$\gamma - [1/m]$
$R_{01}$	$l - [m]$
$R_{02}$	$\Delta a - [m]$
$R_{04}$	$z_0 - [m]$

onde

$$\gamma = \sqrt{\frac{GJ_t}{EJ_w}}$$

$l =$  vão interno da viga

$\Delta a =$  acréscimo no valor  $a$ , ponto de aplicação da carga.

$z_0 =$  secção a que é referida a linha de influência.

Com os valores nos registros, introduzir  $a_0$  (ponto inicial de aplicação da carga) e pressionar a tecla D.

Serão impressas as ordenadas  $l.i$  desde a abscissa  $a_0$  até  $l$  com incremento  $\Delta a$ .

Apresentamos a seguir a listagem do programa.

000	76	LBL
001	11	A
002	53	(
003	53	(
004	43	RCL
005	10	10
006	22	INV
007	23	LN $\times$
008	75	-
009	43	RCL
010	10	10
011	94	+/-
012	22	INV
013	23	LN $\times$
014	54	)
015	55	÷
016	02	2
017	54	)
018	92	RTN
019	76	LBL
020	12	B
021	53	(
022	53	(
023	43	RCL
024	10	10
025	22	INV
026	23	LN $\times$
027	85	+
028	43	RCL
029	10	10
030	94	+/-
031	22	INV
032	23	LN $\times$
033	54	)
034	55	÷
035	02	2
036	54	)
037	92	RTN
038	76	LBL
039	13	C
040	43	RCL
041	00	00
042	65	$\times$
043	43	RCL
044	01	01
045	95	=
046	42	STD
047	10	10
048	42	STD
049	06	06

050	01	1
051	75	-
052	12	B
053	95	=
054	42	STD
055	09	09
056	65	x
057	02	2
058	85	+
059	11	A
060	42	STD
061	09	09
062	65	x
063	43	RCL
064	10	10
065	95	=
066	42	STD
067	07	07
068	43	RCL
069	00	00
070	65	x
071	43	RCL
072	04	04
073	95	=
074	42	STD
075	10	10
076	12	B
077	42	STD
078	15	15
079	11	A
080	55	÷
081	43	RCL
082	00	00
083	95	=
084	42	STD
085	16	16
086	92	RTN
087	76	LBL
088	16	A'
089	43	RCL
090	00	00
091	65	x
092	43	RCL
093	05	05
094	95	=
095	42	STD
096	10	10
097	43	RCL
098	05	05
099	75	-

100	11	A
101	55	÷
102	43	RCL
103	00	00
104	95	=
105	42	STD
106	14	14
107	01	1
108	75	-
109	12	B
110	95	=
111	42	STD
112	13	13
113	65	×
114	43	RCL
115	08	08
116	85	+
117	43	RCL
118	09	09
119	65	×
120	43	RCL
121	00	00
122	65	×
123	43	RCL
124	14	14
125	95	=
126	55	÷
127	43	RCL
128	07	07
129	95	=
130	42	STD
131	12	12
132	43	RCL
133	14	14
134	65	×
135	43	RCL
136	08	08
137	75	-
138	43	RCL
139	13	13
140	65	×
141	43	RCL
142	01	01
143	65	×
144	53	(
145	01	1
146	75	-
147	43	RCL
148	09	09
149	55	÷

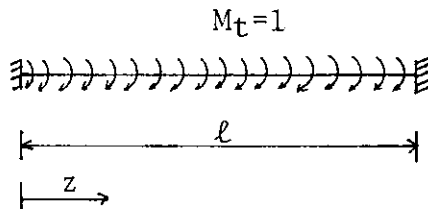
150	43	RCL
151	06	06
152	54	)
153	95	=
154	55	÷
155	43	RCL
156	07	07
157	95	=
158	42	STD
159	11	11
160	92	RTN
161	76	LBL
162	14	D
163	94	+/-
164	85	+
165	43	RCL
166	01	01
167	95	=
168	42	STD
169	05	05
170	13	C
171	76	LBL
172	15	E
173	16	A*
174	29	CP
175	43	RCL
176	04	04
177	85	+
178	43	RCL
179	05	05
180	75	-
181	43	RCL
182	01	01
183	95	=
184	77	GE
185	95	=
186	25	CLR
187	42	STD
188	17	17
189	61	GTD
190	85	+
191	76	LBL
192	95	=
193	65	×
194	43	RCL
195	00	00
196	95	=
197	42	STD
198	10	10
199	11	A



200	55	÷
201	43	RCL
202	00	00
203	95	=
204	42	STD
205	17	17
206	76	LBL
207	85	+
208	43	RCL
209	11	11
210	65	×
211	43	RCL
212	15	15
213	85	+
214	43	RCL
215	12	12
216	65	×
217	43	RCL
218	16	16
219	75	-
220	43	RCL
221	17	17
222	95	=
223	99	PRT
224	43	RCL
225	02	02
226	22	INV
227	44	SUM
228	05	05
229	43	RCL
230	05	05
231	77	GE
232	15	E
233	91	R/S

## APÊNDICE II

Programa para cálculo das ordenadas do diagrama de Bi-Momentos para uma Viga Bi-Engastada Sujeita a uma momento Torsor Unitário Uniformemente Distribuído.



uso do programa

Introduzir inicialmente nos registros de dados os seguintes valores:

Registro	Valor a ser Introduzido
$R_{00}$	$\gamma - [^1/m]$
$R_{01}$	$\ell \quad [m]$
$R_{02}$	$\Delta z \quad [m]$

onde

$\Delta z$  é o incremento das abscissas.

Com os valores nos registros, introduzir  $z_0$  (abscissa inicial) e pressionar a tecla A.

Serão impressas as ordenadas do diagrama de bi-momento desde a abscissa  $z_0$  até  $\ell$ , com incremento  $\Delta z$ .

Apresentamos a seguir a listagem do programa.

000	76	LBL
001	16	A*
002	53	(
003	53	(
004	43	RCL
005	10	10
006	22	INV
007	23	LNK
008	75	-
009	43	RCL
010	10	10
011	94	+/-
012	22	INV
013	23	LNK
014	54	)
015	55	÷
016	02	2
017	54	)
018	92	RTN
019	76	LBL
020	17	B*
021	53	(
022	53	(
023	43	RCL
024	10	10
025	22	INV
026	23	LNK
027	85	+
028	43	RCL
029	10	10
030	94	+/-
031	22	INV
032	23	LNK
033	54	)
034	55	÷
035	02	2
036	95	=
037	92	RTN
038	76	LBL
039	12	B
040	43	RCL
041	00	00
042	65	×
043	43	RCL
044	01	01
045	95	=
046	42	STD
047	10	10
048	17	B*
049	75	-

050	01	1
051	95	=
052	65	x
053	02	2
054	95	=
055	35	1/X
056	65	x
057	43	RCL
058	10	10
059	95	=
060	42	STD
061	04	04
062	92	RTN
063	76	LBL
064	11	A
065	42	STD
066	03	03
067	12	B
068	43	RCL
069	01	01
070	32	X!T
071	76	LBL
072	95	=
073	43	RCL
074	03	03
075	67	EQ
076	65	x
077	77	GE
078	85	+
079	76	LBL
080	65	x
081	65	x
082	43	RCL
083	00	00
084	95	=
085	42	STD
086	10	10
087	16	A*
088	85	+
089	53	(
090	53	(
091	43	RCL
092	01	01
093	75	-
094	43	RCL
095	03	03
096	54	)
097	65	x
098	43	RCL
099	00	00

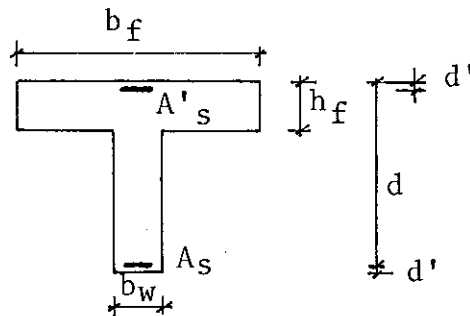
```

100  54  )
101  42  STD
102  10  10
103  16  An
104  95  =
105  94  +/-
106  65  ×
107  43  RCL
108  04  04
109  85  +
110  01  1
111  95  =
112  55  ÷
113  43  RCL
114  00  00
115  33  X2
116  95  =
117  99  PRT
118  43  RCL
119  02  02
120  44  SUM
121  03  03
122  61  GTD
123  95  =
124  76  LBL
125  85  +
126  91  R/S

```

APÊNDICE III

Programa para Cálculo de Parâmetros Utilizados no Cálculo de Tensões de Flexão e Flecha (No Estádio II) de Vigas Retangulares ou "T".



$A_s$  = Área da armadura tracionada

$A'_s$  = Área da armadura comprimida

$b_w$  = largura da nervura

$b_f$  = largura da mesa

$h_f$  = espessura da mesa

$d$  = altura útil da viga

$d'$  = dist. do CG da armadura ao bordo da viga

uso do programa

Pressionar as teclas RST seguida de R/S

Será impresso FCK, introduzir o valor  $f_{ck}$  -  $[kg/cm^2]$  e pressionar R/S será impresso o valor  $f_{ck}$  e BF, introduzir o valor  $b_f$ (cm) e pressionar R/S, etc.

Os valores introduzidos serão:

$f_{ck}$  -  $[kg/cm^2]$

$b_f$  -  $[cm]$

$b_w$  -  $[cm]$

$d$  -  $[cm]$

$d'$  -  $[cm]$

$A_s$  -  $[cm^2]$

$A'_s$  -  $[cm^2]$

$h_f$  -  $[cm]$

Serão calculados e impressos os seguintes valores:

$E_c$  - módulo de deformação do concreto -  $[kg/cm^2]$

$n$  - relação dos módulos de deformação  $n = \frac{E_s}{E_c}$

$x$  - dist. da linha neutra à borda comprimida -  $[cm]$

$R_c$  - relação de curvatura  $R_c = \frac{3|\epsilon_c| + \epsilon_s}{|\epsilon_c| + \epsilon_s}$

$I$  - momento de inércia no estágio II -  $[cm^4]$

000	98	ADV
001	22	INV
002	58	FIX
003	02	2
004	01	1
005	01	1
006	05	5
007	02	2
008	06	6
009	11	A
010	42	STD
011	00	00
012	85	+
013	03	3
014	05	5
015	95	=
016	34	FX
017	65	x
018	01	1
019	08	8
020	09	9
021	00	0
022	00	0
023	95	=
024	42	STD
025	08	08
026	55	÷
027	02	2
028	01	1
029	00	0
030	00	0
031	00	0
032	00	0
033	00	0
034	95	=
035	35	1/X
036	42	STD
037	09	09
038	01	1
039	04	4
040	02	2
041	01	1
042	11	A
043	42	STD
044	01	01
045	01	1
046	04	4
047	04	4
048	03	3
049	11	A



050	42	STD
051	02	02
052	01	1
053	06	6
054	11	A
055	42	STD
056	05	05
057	01	1
058	06	6
059	06	6
060	05	5
061	11	A
062	42	STD
063	04	04
064	01	1
065	03	3
066	03	3
067	06	6
068	11	A
069	42	STD
070	06	06
071	01	1
072	03	3
073	03	3
074	06	6
075	06	6
076	05	5
077	11	A
078	42	STD
079	07	07
080	02	2
081	03	3
082	02	2
083	01	1
084	11	A
085	42	STD
086	03	03
087	43	RCL
088	09	09
089	65	x
090	53	(
091	43	RCL
092	06	06
093	85	+
094	43	RCL
095	07	07
096	54	)
097	55	÷
098	43	RCL
099	01	01

```

100 95 =
101 42 STD
102 10 10
103 43 RCL
104 09 09
105 65 x
106 02 2
107 55 ÷
108 43 RCL
109 01 01
110 65 x
111 53 (
112 43 RCL
113 06 06
114 65 x
115 43 RCL
116 05 05
117 85 +
118 43 RCL
119 07 07
120 65 x
121 43 RCL
122 04 04
123 54 )
124 95 =
125 42 STD
126 11 11
127 10 E'
128 43 RCL
129 01 01
130 75 -
131 43 RCL
132 02 02
133 95 =
134 42 STD
135 13 13
136 29 CP
137 67 EQ
138 95 =
139 43 RCL
140 03 03
141 32 X!T
142 43 RCL
143 12 12
144 22 INV
145 77 GE
146 95 =
147 43 RCL
148 13 13
149 65 x

```

150	43	RCL
151	03	03
152	85	+
153	43	RCL
154	09	09
155	65	x
156	53	(
157	43	RCL
158	06	06
159	85	+
160	43	RCL
161	07	07
162	54	)
163	95	=
164	55	÷
165	43	RCL
166	02	02
167	95	=
168	42	STD
169	10	10
170	43	RCL
171	13	13
172	65	x
173	43	RCL
174	03	03
175	33	X²
176	85	+
177	02	2
178	65	x
179	43	RCL
180	09	09
181	65	x
182	53	(
183	43	RCL
184	06	06
185	65	x
186	43	RCL
187	05	05
188	85	+
189	43	RCL
190	07	07
191	65	x
192	43	RCL
193	04	04
194	54	)
195	95	=
196	55	÷
197	43	RCL
198	02	02
199	95	=

200	42	STD
201	11	11
202	10	E'
203	45	YX
204	03	3
205	55	+
206	03	3
207	65	x
208	43	RCL
209	02	02
210	85	+
211	43	RCL
212	13	13
213	65	x
214	43	RCL
215	03	03
216	65	x
217	53	(
218	43	RCL
219	03	03
220	33	X <sup>2</sup>
221	55	+
222	03	3
223	85	+
224	43	RCL
225	12	12
226	65	x
227	53	(
228	24	CE
229	75	-
230	43	RCL
231	03	03
232	54	)
233	54	)
234	61	GTD
235	85	+
236	76	LBL
237	10	E'
238	43	RCL
239	10	10
240	33	X <sup>2</sup>
241	85	+
242	43	RCL
243	11	11
244	95	=
245	34	TX
246	75	-
247	43	RCL
248	10	10
249	95	=

250	42	STD
251	12	12
252	92	RTN
253	76	LBL
254	11	A
255	69	DP
256	04	04
257	69	DP
258	05	05
259	91	R/S
260	99	PRT
261	92	RTN
262	76	LBL
263	12	B
264	69	DP
265	04	04
266	32	X↑T
267	69	DP
268	06	06
269	92	RTN
270	76	LBL
271	95	=
272	43	RCL
273	12	12
274	45	Y×
275	03	3
276	55	+
277	03	3
278	65	×
279	43	RCL
280	01	01
281	76	LBL
282	85	+
283	85	+
284	43	RCL
285	09	09
286	65	×
287	53	(
288	43	RCL
289	07	07
290	65	×
291	53	(
292	43	RCL
293	12	12
294	75	-
295	43	RCL
296	04	04
297	54	)
298	33	X²
299	85	+

300	43	RCL
301	06	06
302	65	x
303	53	(
304	43	RCL
305	05	05
306	75	-
307	43	RCL
308	12	12
309	54	)
310	33	X <sup>2</sup>
311	54	)
312	95	=
313	42	STD
314	14	14
315	43	RCL
316	12	12
317	65	x
318	02	2
319	55	÷
320	43	RCL
321	05	05
322	85	+
323	01	1
324	95	=
325	42	STD
326	15	15
327	98	ADV
328	43	RCL
329	08	08
330	32	X↓T
331	01	1
332	07	7
333	01	1
334	05	5
335	12	B
336	43	RCL
337	09	09
338	32	X↓T
339	03	3
340	01	1
341	12	B
342	43	RCL
343	12	12
344	32	X↓T
345	04	4
346	04	4
347	12	B
348	43	RCL
349	15	15

```

050 051 052 053 054 055 056 057 058 059 060 061 062
02 03 05 01 05 12 43 14 32 02 04 12 01
X+T ROL 14 X+T 24 B RST

```

BIBLIOGRAFIA

1. SANTOS, Sydney M.G., Estudo das Hastes de Paredes Delgadas com Secção Aberta. PUC-RJ, Junho 1967.
2. VLASSOV, Basile Z. Plêces Longues en Voiles Mincees. 2<sup>a</sup> Edição, Editions Eyrolles, Paris, 1962.
3. MEGSON, TH.G., Linear Analysis of Thin-Walled Elastic Structures. Surrey University Press. 1974.
4. KOLLBRUNNER, C.F. Hajdin, N.Krajcinovic, D. Matrix Analysis of Thinwalled Structures. Institute for Engineering Research, Dez. 1969
5. FEODOSIEV, V.I., Resistencia de Materiales. Editorial Mir. Moscou, 1980.
6. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado. Norma NB-1-1978.
7. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Cargas Móveis em Pontes Rodoviárias. Norma NB-6-1960.